This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

TG
327
W6

UC-NRLF
$B 26 239

THEORIE

DER

ELASTIGEN BOGENTRÄGER.

VON

DR. JACOB J. WEYRAUCH
PROFESSOR AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU STUTTGART.

MIT 43 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

SEPARATABDRUCK AUS DER ZEITSCHRIFT FÜR BAUKUNDE.

YC 13008

MÜNCHEN.
THEODOR ACKERMANN.
1879.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received JAN 7 1892, 18
Accessions No. 46618 Shelf No.

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.
Received JAN 7 1892, 18
Accessions No. 46618 Shelf No.

THEORIE

DER

ELASTIGEN BOGENTRÄGER.

VON

DR. JACOB J. WEYRAUCH
PROFESSOR AN DER POLYTECHNISCHEN SCHULE ZU STUTTGART.

MIT 43 IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN.

SEPARATABDRUCK AUS DER ZEITSCHRIFT FÜR BAUKUNDE.

MÜNCHEN.
THEODOR ACKERMANN.
1879.

T 6.327
W 6.

46618

Vorliegende Brochüre bildet einen Separatabdruck aus der „Zeitschrift für Baukunde.“ Ich hielt einen solchen besonders im Interesse derjenigen für nicht ganz überflüssig, welche die Theorie der elastigen Bogenträger ab ovo studiren wollen. Eine von Grund aus gehende, systematisch durchgeführte und vollständige Theorie der Bogenträger ist bis jetzt nicht publicirt worden. Das hat auch mit dazu beigetragen, die Anwendung dieses schönsten und ökonomisch vortheilhaften Trägersystems zu erschweren. In Hinsicht der practischen Berechnung von Bogenbrückenträgern verweise ich auf die Andeutungen des § 16.

Stuttgart.

Der Verfasser.

Inhalt.

		Seite
	Eingang, Definitionen, Voraussetzungen	2
	I. Allgemeine Theorie.	
§ 1.	Grundgleichungen für Biegung durch äussere Kräfte und Wärme	2
§ 2.	Stützlinie. Kernlinien. Gurtungsbeanspruchungen . .	9
§ 3.	Aeussere Kräfte und Momente	14
§ 4.	Spezifische Transversalkraft und spezifische Längsschubkraft	19
§ 5.	Schnittlinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke .	25
§ 6.	Ungünstigste Belastungen.	
	Allgemeines	28
	Normalkraft	30
	Normalspannungen	30
	Schubkräfte	32
	Momente	33
	II. Besondere Arten von Bogenträgern.	
§ 7.	Bogen mit einem festgespannten und einem freischwebenden Ende	35
§ 8.	Bogen mit unendlich vielen Gelenken. Kettenlinien .	37
§ 9.	Bogen mit drei Gelenken	40
§ 10.	Bogen mit 2 Gelenken	44
§ 11.	Bogen ohne Gelenk	48
	III. Besondere Formen von Bogenträgern.	
§ 12.	Parabelbogenträger.	
	Allgemeines	52
	Bogen mit einem festgespannten und einem freischwebenden Ende (§ 7)	57
	Symetrische Bogen mit drei Gelenken (§ 9) . . .	57

Seite

Symmetrische Bogen mit zwei Gelenken (§ 10) . . 56

Symmetrische Bogen ohne Gelenk (§ 11) . . . 60

§ 13. Kreisbogenträger.

Allgemeines 63

Bogen mit einem festgespannten und einem freischwebenden Ende (§ 7) 67

Symmetrische Bogen mit drei Gelenken (§ 9) . . . 67

Symmetrische Bogen mit zwei Gelenken (§ 10) . . 67

Symmetrische Bogen ohne Gelenk (§ 11) . . . 69

§ 14. Beispiele 71

§ 15. Ueber Kettenbrückenlinien 75

Anhang.

§ 16. Ueber Anwendung und Berechnung von Bogenträgern . 80

Noten 85

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

Im Folgenden sollen die elastigen Bogenträger in ähnlicher Allgemeinheit und Einfachheit analytisch behandelt werden, wie dies in meiner „Theorie der continuirlichen und einfachen Träger“ mit den geraden Trägern geschehen ist.

Als „elastiger Bogenträger“ wird dabei ein Körper bezeichnet, welcher eine einfach gekrümmte Curve zur Schwerpunktsaxe hat, und in der Ebene dieser „Bogenaxe“ von verticalen Kräften, „Lasten“, ergriffen wird. Die Lasten können durch messbare Strecken von einander entfernt sein „concentrirte Lasten“, oder eine stetige Folge bilden, „vertheilte Lasten“. Die Ebene der Bogenaxe wird „Bogenebene“ genannt, diejenige Fläche senkrecht zur Letzteren, welche die Axe enthält, heisst „Axschicht“. „Querschnitt“ nennt man einen ebenen Schnitt senkrecht zur Axschicht, als „Bogenlänge“ zwischen zwei Querschnitten wird die Axlänge s zwischen denselben gerechnet.

Wir nehmen in der Bogenebene ein Coordinatensystem mit horizontaler x — Axe und verticaler y — Axe an und verstehen unter den Coordinaten x, y eines Querschnitts die Coordinaten seines in der Axe liegenden Schwerpunktes. Die positive Richtung der x — Axe wird nach rechts, die der y — Axe nach oben angenommen, das Vorzeichen des Winkels φ, welchen die Axe bei x mit dem Horizont einschliesst, ist dann wegen $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$ durch die Form der Bogenaxe, also im Allgemeinen durch die Gleichung der Letzteren bestimmt. Treten infolge äusserer Einwirkungen Aenderungen gewisser Grössen x, y, φ, s, . . . ein, so sollen diese Aen-

derungen immer durch $\triangle x$, $\triangle y$, $\triangle \varphi$, $\triangle s$, . . . bezeichnet werden.

Als Grundhypothese der Theorie krummer wie gerader Träger gilt:

A. Jeder vor Einwirkung der äusseren Kräfte geführte Querschnitt bildet von Neuem eine Ebene, sobald nach Einwirkung der Kräfte Gleichgewicht eingetreten ist.

Ausserdem beschränkt man die Untersuchungen durch die Voraussetzung:

B. Die Formänderungen der Bogenaxe sind so klein, dass für alle Querschnitte mit genügender Genauigkeit $\cos \triangle \varphi = 1$, $\sin \triangle \varphi = \triangle \varphi$ gesetzt werden kann.

I. Allgemeine Theorie.

Die in diesem Abschnitte abzuleitenden Gesetze gelten für alle Arten und Formen von Bogenträgern, nach oben oder unten gekrümmt, symmetrisch oder nicht, mit oder ohne Gelenke, constanten oder variabeln Querschnitts für beliebige Belastung und beliebige Temperaturen.

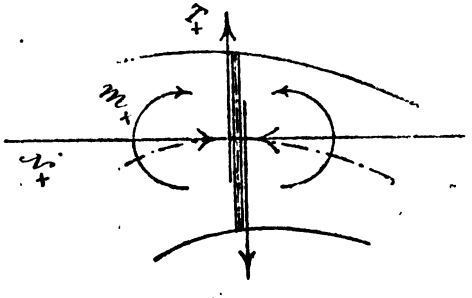
§ 1. Grundgleichungen für Biegung durch äussere Kräfte und Wärme.

Wird ein gerader oder krummer Stab von Aussen durch beliebige Kräfte ergriffen oder ändert sich die Temperatur so entstehen erfahrungsgemäss im Allgemeinen Längenänderungen der Faserabschnitte zwischen vorher geführten Querschnitten und damit im Zusammenhang eine Formänderung der Axe. Die Längenänderungen der Fasern können nur in Folge der Einwirkungen von Aussen entstanden sein und es müssen also gewisse Componenten „äusserer Kräfte“ an den Fasern wirken. Diese würden aber den Zusammenhang der Fasern sofort zerstören, wenn nicht andere Kräfte ihn zu erhalten strebten, welche „widerstehenden Kräfte“ von der Cohäsion herrühren.

Wir können uns also in jedem Querschnitt x zwei Flä-

chen zusammenhängend denken (Fig. 1). Suchen die äusseren Kräfte und Momente links von x die Fläche daselbst von der rechts von x zu trennen, so wirken von dieser aus solche Kräfte und Momente, welche nach Eintritt des Gleich-

Fig. 1.



gewichts den Ersteren genau gleich, aber von entgegengesetzter Richtung sind. Analoges gilt für die äusseren Kräfte rechts von x, denen von der Fläche links von x aus widerstanden wird. Um nun aber in Hinsicht der Vorzeichen keine Irrthümer walten zu lassen, wollen wir unter den äusseren Kräften und Momenten im Querschnitt x ein für allemal die von der Fläche links von x her wirkenden verstehen.

Welche Componenten der äussern Kräfte auch an den Fasern wirken mögen, so können sie für einen ganzen Querschnitt doch nur zur Folge haben eine „Axialkraft" oder „Normalkraft" N_x, eine „Transversalkraft" T_x und ein „Angriffsmoment" M_x. Wir wollen M_x dann als positiv bezeichnen, wenn es wie der Zeiger der Uhr rechts herumdreht, T_x wenn es von unterhalb nach oberhalb der Axschicht wirkt, und N_x wenn es Druck bedeutet, also gegen den Querschnitt gerichtet ist.

Die Entfernung einer Faser oder eines Querschnittselements von der Axschicht werden wir durch η bezeichnen und den Werth von η als positiv oder negativ ansehen, je nachdem die Faser oberhalb oder unterhalb der Axschicht liegt.

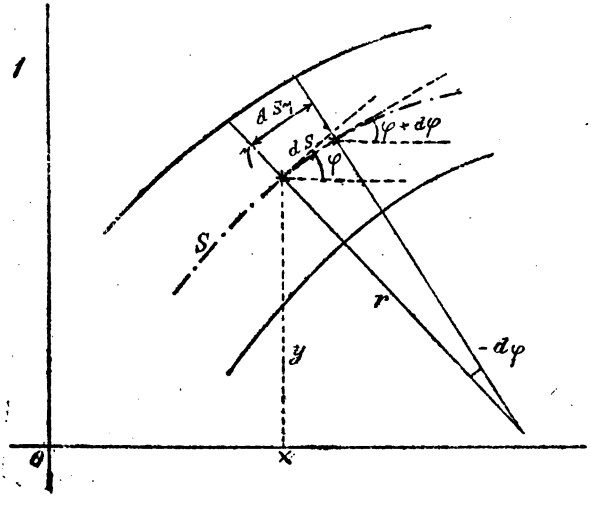
Es seien vor Einwirken äusserer Kräfte und bei gewisser Temperatur t_0 zwei Querschnitte geführt, der eine bei x, y, wo die Axe den Neigungswinkel φ hat (Fig. 2), und um die Axlänge s von einem gewissen Ausgangspunkte entfernt, — der andere um ds weiter. Dann ist die Länge der Faserabschnitte in Entfernung η von der Axschicht für jede Bogenform

$$ds_\eta = ds + \eta\,(-d\varphi) = ds - \eta d\varphi.$$

Wirken nun äussere Kräfte und Wärme ein, so findet Biegung statt, der erste Querschnitt geräth an eine andere Stelle $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, es ändern sich s um Δs, φ um $\Delta\varphi$, so dass jetzt die Länge der Faserabschnitte in Entfernung η analog vorstehender Gleichung.

$$d(s_\eta + \Delta s_\eta) = d(s' + \Delta s) - \eta\, d(\varphi + \Delta\varphi).$$

Fig. 2.



Durch Subtraction der ersten von der 2. Gleichung folgt

$$d\Delta s_\eta = d\Delta s - \eta d\Delta\varphi$$

Unter der „relativen Längenänderung" versteht man bekanntlich das Verhältniss der Zu- oder Abnahme der Länge,

„absolute Längenänderung", zur ursprünglichen Länge. Bezeichnen wir nun die relative Längenänderung, welche einer Temperaturerhöhung um 1° C entspricht, durch ε, so würde, wenn lediglich eine Temperaturerhöhung von τ^0 auf unsere Faser eingewirkt hätte, die relative Längenänderung betragen

$$\frac{d \triangle s_\eta}{ds_\eta} = \varepsilon \tau$$

Hätte dagegen allein eine Kraft von N_η per Querschnittseinheit in der Längsrichtung der Faser gewirkt (positive N_η bedeuten Druck), und bezeichnen wir den Elastizitätsmodul durch E, so würde die relative Längenänderung betragen

$$\frac{d \triangle s_\eta}{ds_\eta} = - \frac{N_\eta}{E}$$

Da nun Längsspannungen und Temperaturänderung gleichzeitig vorkommen können, so haben wir die relative Längenänderung allgemein.

$$\frac{d \triangle s_\eta}{ds_\eta} = \varepsilon \tau - \frac{N_\eta}{E} \quad \ldots\ldots 1$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich nach Substitution der Werthe von $d\triangle s_\eta$ und ds_η die Grösse der „Normalspannung" N_η in Entfernung η von der Axschichte

$$N_\eta = E \frac{d \triangle s - \eta d \triangle \varphi}{ds} \cdot \frac{1}{\eta \frac{d\varphi}{ds} - 1} + E \varepsilon \tau$$

oder wenn r den Krümmungsradius bei x bezeichnet, weil dann (Fig. 2)

$$r (- d\varphi) = ds, \quad \frac{d\varphi}{ds} = - \frac{1}{r}$$

$$N_\eta = E \left(\eta \frac{d \triangle \varphi}{ds} - \frac{d \triangle s}{ds} \right) \frac{r}{r + \eta} + E \varepsilon \tau \ldots 2$$

Die Kraft, welche die gleiche Längenänderung für eine Faser vom Querschnitt $\mathfrak{F}$ bewirkt, ist natürlich $\mathfrak{F} N_\eta$ und da solche

Kräfte im Allgemeinen in allen Faserquerschnitten wirken, so hat man ihre algebraische Summe, die ganze Normalkraft bei x, 3

$$N_x = \Sigma \mathfrak{F} N_\eta = E\left(\frac{d\triangle\varphi}{ds}\Sigma\frac{\mathfrak{F} r\eta}{r+\eta} - \frac{d\triangle s}{ds}\Sigma\frac{\mathfrak{F} r}{r+\eta} + \varepsilon\Sigma\mathfrak{F}\tau\right)$$

worin sich Σ auf alle Elemente des Querschnittes bezieht.

Jede ein Element $\mathfrak{F}$ afficirende Normalkraft $\mathfrak{F}N_\eta$ erzeugt in Bezug auf die Axschicht ein Moment $\mathfrak{F}N_\eta . \eta$ und da die Transversalkraft T_x durch die Axschicht geht, so ist in Bezug auf Letztere das Moment sämmtlicher im Querschnitt angreifenden Kräfte

$$M_x = \Sigma\mathfrak{F}\eta N_\eta = E\left(\frac{d\triangle\varphi}{ds}\Sigma\frac{\mathfrak{F} r\eta^2}{r+\eta} - \frac{d\triangle s}{ds}\Sigma\frac{\mathfrak{F} r\eta}{r+\eta} + \varepsilon\Sigma\mathfrak{F}\eta\tau\right)$$

4

Da immer angenommen wird, dass die Temperatur in allen Elementen eines Querschnitts dieselbe ist, so kann in 3) und 4) T vor Σ gesetzt werden. Schreiben wir weiter

$$\frac{\mathfrak{F} r\eta}{r+\eta} = \mathfrak{F}\eta - \frac{\mathfrak{F}\eta^2}{r+\eta}$$

$$\frac{\mathfrak{F} r}{r+\eta} = \mathfrak{F} - \frac{1}{r}\mathfrak{F}\eta + \frac{1}{r}\frac{\mathfrak{F}\eta^2}{r+\eta}$$

setzen zur Abkürzung

$$r\Sigma\frac{\mathfrak{F}\eta^2}{r+\eta} = W \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5$$

und berücksichtigen, dass, wenn F den ganzen Querschnitt bezeichnet,

$$\Sigma\mathfrak{F} = F \qquad \Sigma\mathfrak{F}\eta = 0 \qquad \text{wird, so folgen}$$

$$\frac{N_x}{E} = -\left(\frac{d\triangle\varphi}{ds} + \frac{1}{r}\frac{d\triangle s}{ds}\right)\frac{W}{r} - \left(\frac{d\triangle s}{ds} - \varepsilon\tau\right)F$$

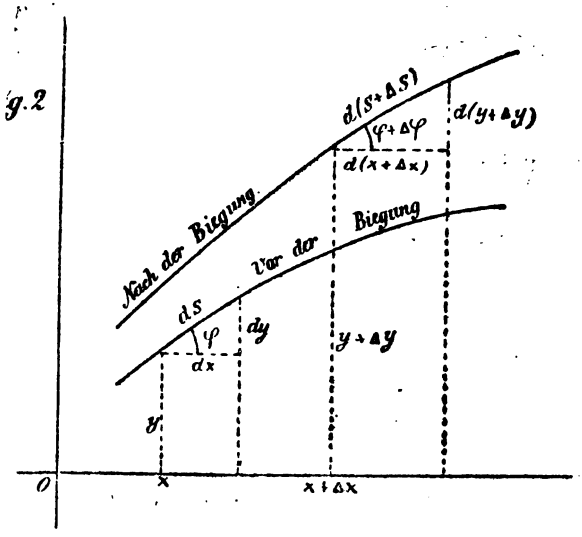
$$\frac{M_x}{E} = \left(r\frac{d\triangle\varphi}{ds} + \frac{d\triangle s}{ds}\right)\frac{W}{r}$$

und aus diesen beiden Gleichungen

$$\frac{d\triangle s}{ds} = -\left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{1}{EF} + \varepsilon\tau \qquad = Y \quad . \quad 6$$

$$\frac{d\triangle\varphi}{ds} = \left(N_x + \frac{M_x}{r}\right)\frac{1}{EFr} + \frac{M_x}{EW} - \frac{\varepsilon\tau}{r} = X \quad . \quad 7$$

Fig. 3.



Durch Substitution dieser Werthe in 2) ergibt sich die Normalspannung in Entfernung η von der Axschicht

$$N_\eta = \frac{N_x}{F} + \frac{M_x}{Fr} + \frac{r\eta}{r+\eta}\,\frac{M_x}{W} \quad \ldots\ldots 8$$

Nach Fig. 3 hat man

$$d(x+\triangle x) = d(s+\triangle s)\cos(\varphi+\triangle\varphi)$$
$$d(y+\triangle y) = d(s+\triangle s)\sin(\varphi+\triangle\varphi)$$

und da mit Rücksicht auf Voraussetzung B

$$\cos(\varphi+\triangle\varphi) = \cos\varphi\cos\triangle\varphi - \sin\varphi\sin\triangle\varphi = \frac{dx}{ds} - \triangle\varphi\,\frac{dy}{ds}$$

$$\sin(\varphi+\triangle\varphi) = \sin\varphi\cos\triangle\varphi + \cos\varphi\sin\triangle\varphi = \frac{dy}{ds} + \triangle\varphi\,\frac{dx}{ds}$$

so folgt durch Substitution und Klammerauflösung

$$d\triangle x = -\triangle\varphi\,dy + \frac{d\triangle s}{ds}dx - \frac{d\triangle s}{ds}\,dy\,.\,\triangle\varphi$$

$$d\triangle y = +\triangle\varphi\,dx + \frac{d\triangle s}{ds}dy + \frac{d\triangle s}{ds}\,dx\,.\,\triangle\varphi$$

Wegen der Kleinheit von $\triangle\varphi$ verschwinden die letzten Glieder dieser Gleichungen gegen die vorhergehenden und folgen die Aenderungen von x, y

$$\triangle x = -\int \triangle\varphi\, dy + \int Y dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9$$

$$\triangle y = \int \triangle\varphi\, dx + \int Y dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10$$

während die Aenderungen des Neigungswinkels φ und der Axlänge s

$$\triangle\varphi = \int X ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 11$$

$$\triangle s = \int Y ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 12$$

Die ursprünglichen Abscissen x derjenigen Querschnitte, für welche die Verrückungen in mathematischem Sinne Maxima oder Minima werden finden sich aus folgenden Bedingungen

für Maxima und Minima von $\triangle x$

$$\frac{d\triangle x}{dx} = 0 \text{ oder } Y - \triangle\varphi \operatorname{tg}\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 13$$

für Maxima und Minima von $\triangle y$

$$\frac{d\triangle y}{dx} = 0 \text{ oder } Y \operatorname{tg}\varphi + \triangle\varphi = 0 \quad . \quad . \quad . \quad 14$$

für Maxima und Minima von $\triangle\varphi$

$$\frac{d\triangle\varphi}{dx} = 0 \text{ oder } X = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 15$$

für Maxima und Minima von $\triangle s$

$$\frac{d\triangle s}{dx} = 0 \text{ oder } Y = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 16$$

Dagegen ergeben sich die ursprünglichen Abscissen derjenigen Querschnitte, für welche nach der Biegung die Ordinate $y + \triangle y$ Maxima oder Minima erreicht aus

$$\frac{d(y + \triangle y)}{d(x + \triangle x)} = 0 \text{ oder } \varphi + \triangle\varphi = 0 \quad . \quad . \quad 17$$

Ist der Krümmungsradius r so gross im Vergleich zur Querschnittshöhe, dass in 5) jedes η gegen v vernachlässigt

werden kann, so wird W gleich dem Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Axschicht.

$$W = \Sigma \mathfrak{F} \eta^2 = \Theta \quad \ldots\ldots\ldots \quad 5_a$$

Für einen rechteckigen Querschnitt von der Höhe h lässt sich z. B. aus 5) und 5_a) leicht ableiten:

$$\frac{W}{\Theta} = 1 + \frac{3}{5 \cdot 2^2}\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{3}{7 \cdot 2^4}\left(\frac{h}{r}\right)^4 + \frac{3}{9 \cdot 2^6}\left(\frac{h}{r}\right)^6 + \ldots,$$

für $\frac{r}{h}$ =	1	2	3	4	5	7	10
$\frac{W}{\Theta}$ =	1,182	1,039	1,017	1,009	1,006	1,003	1,001

womit schon ersichtlich ist, dass bei Brückenträgern immer Θ an Stelle von W gesetzt werden kann. Ausserdem lassen sich für Brückenträger wie insbesondere auch praktische Rechnungen ergeben, in 6) bis 8) die Glieder mit r im Nenner gegen die andern vernachlässigen, so dass folgende Näherungsformeln entstehen. (Siehe darüber § 2).

$$Y = \varepsilon\tau - \frac{N_x}{EF} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 6_a$$

$$X = \frac{M_x}{E\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 7_a$$

$$N_\eta = \frac{N_x}{F} + \eta\frac{M_x}{\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 8_a$$

Die Ableitungen dieses und des folgenden Abschnitts gelten jedoch, wo nichts Gegentheiliges bemerkt ist, auch für die genauen Formeln.

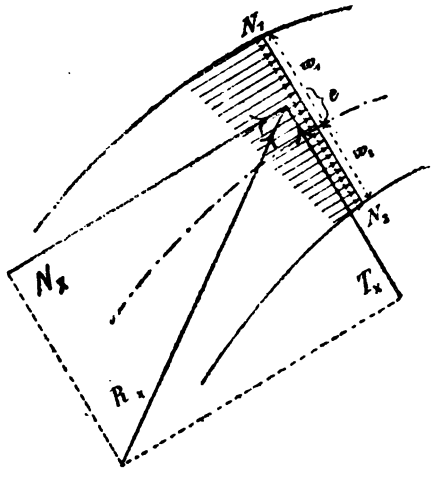
§. 2. Stützlinie. Kernlinie. Gurtungsbeanspruchungen.

Die Resultante aller Normalkräfte $\mathfrak{F} N_\eta$ eines Querschnitts x bezeichnen wir durch N_x. Die Entfernung e des Angriffspunktes von N_x oder auch von R_x (Fig. 4) in Bezug auf die Axschicht folgt aus

$$eN_x = \Sigma \mathfrak{F} \eta . N_\eta = M_x$$

$$e = \frac{M_x}{N_x} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 18$$

Fig. 4.



e ist positiv und der Angriffspunkt von N_x liegt oberhalb der Axschicht wenn M_x und N_x von gleichen Vorzeichen sind, andernfalls tritt das Gegentheil ein. Denkt man sich bei irgend einer Belastung die Angriffspunkte von N_x für alle Querschnitte ermittelt, so bildet die Gesammtheit derselben eine stetige Curve, welche „Stützlinie" genannt wird.

Nach der Näherungsformel 8. ist mit Rücksicht auf 18) die Normalspannung bei x, η

$$N_\eta = \frac{N_x}{F} + \eta \frac{M_x}{\Theta} = \frac{N_x}{F}\left(1 + e\frac{F\eta}{\Theta}\right) \quad . \quad . \quad . \quad 19$$

Hieraus ersieht man, dass N_η seine Grenzwerthe für einen bestimmten Querschnitt zugleich mit η, d. h. in den beiderseits am weitesten von der Axschicht entfernten Fasern erreicht. Sind a_1, a_2 die absoluten Entfernungen des höchsten und tiefsten Punktes von der Axschicht und werden die nur vom Querschnitt abhängigen Grössen

$$\frac{\Theta}{F a_2} = k_1 \qquad \frac{\Theta}{F a_1} = k_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20$$

bezeichnet, so erhält man die Normalspannungen der obersten und untersten Faser.

$$N_1 = \frac{N_x}{F} + a_1 \frac{M_x}{\Theta} = \frac{N_x}{F}\left(1 + \frac{e}{k_2}\right) \quad \ldots \quad 21$$

$$N_2 = \frac{N_x}{F} - a_2 \frac{M_x}{\Theta} = \frac{N_x}{F}\left(1 - \frac{e}{k_1}\right) \quad \ldots \quad 22$$

Die beiden Punkte K_1, K_2, welche um $\eta = k_1$ und $\eta = -k_2$ von der Axschicht entfernt liegen, heissen „Kernpunkte" des Querschnitts. Denkt man sich die Kernpunkte aller Querschnitte bestimmt, so erhält man in ihrer Aufeinanderfolge zwei stetige Linien, welche „Kernlinien" genannt werden. Sie fanden zuerst durch Culmann in der Bogentheorie Verwendung, worauf Winkler bei Bestimmung der ungünstigsten Belastungen davon Gebrauch machte.

Sind die Grenzwerthe N_1, N_2 von einerlei Vorzeichen, so gilt dies auch für alle zwischenliegenden N_η, sämmtliche Normalspannungen des Querschnitts müssen dann das gleiche Vorzeichen wie ihre Resultante N_x haben. Es ist aber nach 21) und 22)

N_1 mit N_x von einerlei Vorzeichen wenn $e > -k_2$

N_2 „ N_x „ „ „ „ $e < k_1$ daher:

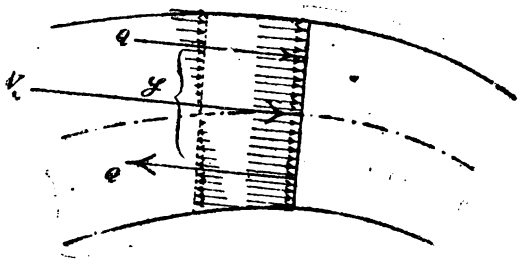
Sämmtliche Normalspannungen eines Querschnitts haben unter sich und mit ihrer Resultante N_x einerlei Vorzeichen, wenn bei diesem Querschnitt die Stützlinie zwischen den Kernlinien liegt. Andernfalls sind die Vorzeichen der Normalspannungen verschieden und hat für $e < -k_2$ N_1, für $e > k_1$ N_2 das entgegengesetzte Vorzeichen wie N_x.

Nach 19) ist derjenige Theil der Normalspannung N_x welcher vom Moment herrührt gleich $\eta \frac{M_x}{\Theta}$, er entspricht für ein Flächenelement $\mathfrak{F}$ einer Kraft $\mathfrak{F}\eta \frac{M_x}{\Theta}$ und die Summe aller dieser Kräfte für einen ganzen Querschnitt ist wegen $\Sigma \mathfrak{F}_\eta = 0$

$$\frac{M_x}{\Theta} \Sigma \mathfrak{F}\eta = 0,$$

wenn sich das Summenzeichen ohne Grenzenangabe wie immer auf den ganzen Querschnitt bezieht. Denkt man sich nun

Fig. 5.



alle oberhalb bezw. alle unterhalb der Axschicht liegenden und vom Moment allein herrührenden Normalkräfte durch ihre Resultanten Q ersetzt (Fig. 5), so hat man den Zahlenwerth derselben

$$Q = \frac{M_x}{\Theta} \sum_{0}^{a_1} \mathfrak{F}\eta = \frac{M_x}{\Theta} \sum_{0}^{a_2} \mathfrak{F}\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 23$$

Sind weiter die Angriffspunkte dieser Resultanten um $\mathfrak{h}$ von einander entfernt, so folgt

$$M_x = Q\mathfrak{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24$$

woraus durch Substitution des Werthes von Q

$$\mathfrak{h} = \frac{\Theta}{\sum_{0}^{a_1} \mathfrak{F}\eta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 25$$

Wird der Querschnitt nur durch zwei von einander getrennte Bänder, „Gurtungen“ gebildet (Fig. 6), so pflegt man alle Fasern je einer Gurtung als gleich stark beansprucht zu betrachten. Ist daher $\mathfrak{h}_0$ die Entfernung der Gurtungsschwerpunkte, so folgt für diesen Fall

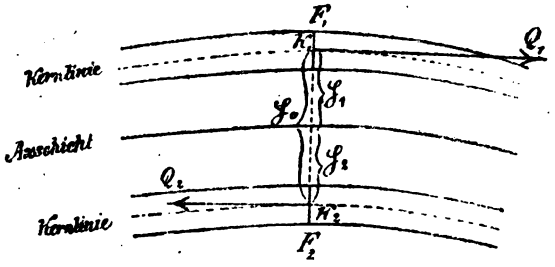
$$M_x = Q\mathfrak{h}_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 24_a$$

Ferner hat man dann, wenn F_1, F_2 die Querschnitte von oberer und unterer Gurtung, $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ ihre Schwerpunktsabstände von der Axschicht bedeuten, die Entfernungen der dur h N_1, N_2 beanspruchten Fasern zu setzen $a_1 = \mathfrak{h}_1$, $a_2 = \mathfrak{h}_2$, womit

$$k_1 = \frac{\Theta}{F\,\eta_2} \qquad k_2 = \frac{\Theta}{F\,\eta_1}$$

Da nun, wie man sich durch Aufstellung der Momenten-

Fig. 6.



gleichung des Querschnitts (als Fläche) für den obern und untern Gurtungsschwerpunkt überzeugt

$$F\,\eta_2 = F_1\,\eta_0 \qquad F\,\eta_1 = F_2\,\eta_0$$

und da wegen $F_2\,\eta_2 = F_1\,\eta_1$ angenähert

$$\Theta = F_1\,\eta_1^2 + F_2\,\eta_2^2 = F_1\,\eta_1\,(\eta_1+\eta_2) = F_2\,\eta_2\,(\eta_1+\eta_2)$$
$$= F_1\,\eta_1\,\eta_0 = F_2\,\eta_2\,\eta_0$$

so folgen durch Substitution

$$k_1 = \eta_1 \qquad k_2 = \eta_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 20.$$

Bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen (Fachwerkbogen, Gitterbogen) fallen die Kernpunkte der Querschnitte mit den Gurtungsschwerpunkten zusammen.

Für die Beanspruchungen der ganzen obern, bezw. der ganzen unteren Gurtung hat man im gleichen Fall

$$Q_1 = \frac{F_1}{F}N_x + Q = \frac{\eta_2 N_x + M_x}{\eta_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 26$$

$$Q_2 = \frac{F_2}{F}N_x - Q = \frac{\eta_1 N_x - M_x}{\eta_0} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 27$$

Der zuletzt ausgesprochene Satz und die Gleichungen 24a) bis 27) gelten natürlich auch, wenn bei dünnwandigen Trägern die Füllung vernachlässigt wird.

Um ein Urtheil darüber zu gewinnen, mit welchem Rechte

man statt der Gleichung 8) die Näherungsformel 8a) oder 19) anwendet, setzen wir auch in 8) $M_x = eN_x$ und berechnen für einen rechteckigen Querschnitt von der Höhe h und der Breite b das Verhältniss $\frac{N_1'}{N_1}$ des genauen Werthes zum Näherungswerth der Normalspannung in der obersten Faser unter der Voraussetzung, dass $e = k_1$ ist, also eben noch alle Normalspannungen von gleichem Vorzeichen sind. Es ergeben sich mit $\Theta = \frac{1}{12} b h^3$, $F = bh$, $k_1 = \frac{1}{6} h$ und $W = \alpha \Theta$

$$N_1' = \frac{N_x}{F}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{h}{r} + \frac{2}{\alpha\left(2 + \frac{h}{r}\right)}\right)$$

$$N_1 = 2\frac{N_x}{F}$$

und hieraus mit Rücksicht auf die in §. 1 berechneten Werthe von α

für $\frac{r}{h}$ =	1	2	3	4	5	7	10
$\frac{N_1'}{N_1}$ =	0,865	0,927	0,949	0,961	0,969	0,978	0,984

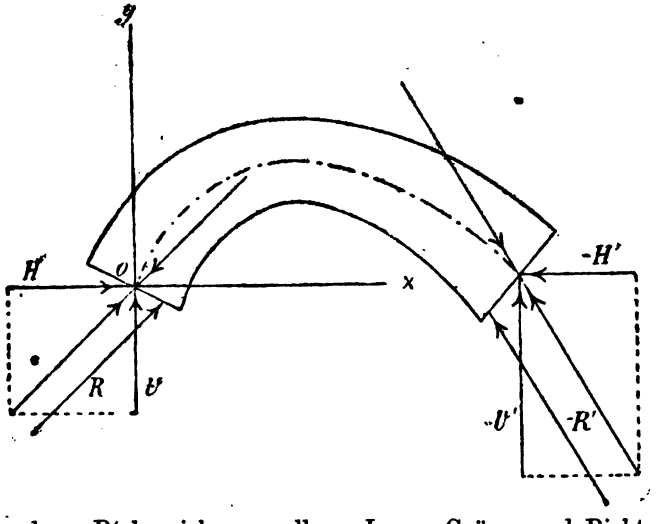
während für Brückenträger immer $\frac{r}{h} > 10$ ist, und die Grundlagen der Theorie ohnehin nicht vollständig genau sind.

§. 3. Aeussere Kräfte und Momente.

Ein beliebiger Bogenträger sei gegeben (Fig. 7). Horizontale Entfernung der Schwerpunkte der Endquerschnitte l, Belastung und Temperatur beliebig, über die Art der Befestigung der Enden und etwaige Gelenke wird nichts vorausgesetzt. Der Ursprung der Coordinaten wird ein für allemal im Schwerpunkt des linken Endquerschnitts angenommen positive Richtungen von x = Axe und y = Axe wie bereits festgestellt, nach rechts und oben, für $x = l$ $y = c$.

Die Gesammtbelastung wird nur durch die Gegendrücke der „Kämpfer" das Gleichgewicht gehalten, welche wir durch

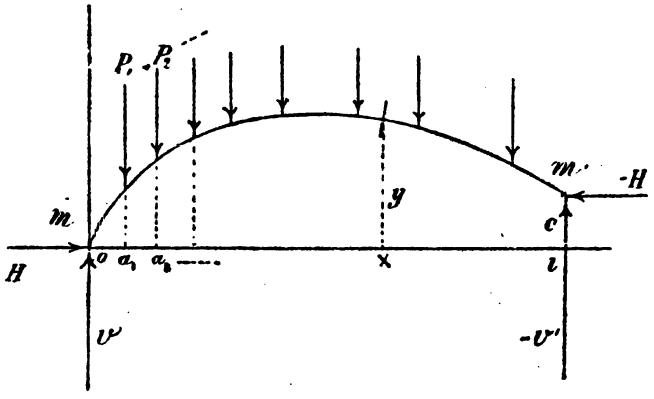
Fig. 7.



R und — R′ bezeichnen wollen. Lage, Grösse und Richtung der Kämpferreactionen sind unbekannt. Denkt man sich jedoch im Schwerpunkt des Querschnitts o parallel der Kämpferreaction R deren Grösse zweimal und entgegengesetzt angetragen, wodurch am Gleichgewicht nichts geändert wird, so erkennt man, dass sich R immer ersetzen lässt durch eine Horizontalkraft H, eine Verticalkraft V und ein Moment M. Ganz ebenso lässt sich — R′ ersetzen durch eine Horizontalkraft, eine Verticalkraft und ein Moment, welche wir durch — H′, — V′, — M′ bezeichnen wollen.

Es mögen nun (Fig. 8) zwischen o und x bei a_1, a_2, ... die Lasten P_1, P_2, ... angreifen, wobei die P auch Lastelemente sein und die a nur um Differenziale da differiren können (vertheilte Lasten). Bezeichnen wir bei x die ganze Horizontalkraft mit H_x, die ganze Verticalkraft mit V_x, so müssen wir, weil bei horizontaler Axe $N_x = H_x$, $T_x = V_x$ wäre, nach den Festsetzungen in § 1 H_x dann als positiv bezeichnen, wenn es von links nach rechts und V_x, wenn es von unten nach oben wirkt. Da nach §. 1 H_x gleich der Summe aller äusseren Horizontalkräfte, V_x gleich der Summe

Fig. 8.



aller äussern Verticalkräfte und M_x gleich der Summe der Momente aller äussern Kräfte links von x sind, so haben wir

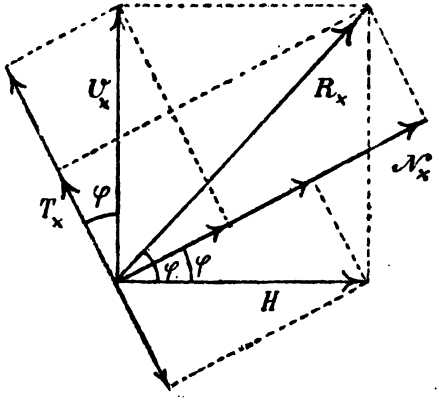
$$H_x = H \quad \ldots \quad 28$$

$$V_x = V - \overset{x}{\Sigma} P \quad \ldots \quad 29$$

$$M_x = M + Vx - Hy - \overset{x}{\Sigma} P\,(x - a) \quad \ldots \quad 30$$

H_x heisst der „Horizontalschub" bei x und Gleichung 1) sagt uns: Für alle Querschnitte eines beliebig be-

Fig. 9.



lasteten Bogenträgers hat der Horizontalschub denselben Werth. Es ist also auch $H_1 = H' = H$.

Durch Zerlegung von H und V_x in Componenten normal und längs dem Querschnitt (Fig. 9) erhält man die ganze Axialkraft und die ganze Transversalkraft bei x

$$N_x = V_x \sin\varphi + H\cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31$$

$$T_x = V_x \cos\varphi - H\sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32$$

Für den Winkel, welchen die Resultante aller im Querschnitt angreifenden Kräfte mit der x = Axe bildet, hat man

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{V_x}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33$$

und für die Grösse der Resultante selbst

$$R_x = \frac{H}{\cos\psi} = \frac{V_x}{\sin\psi} = \sqrt{H^2 + V_x^2} = \sqrt{N_x^2 + T_x^2} \quad . \quad 34$$

Differenzirt man Gleichung 30) nach x so folgt (Note 1)

$$\frac{dM_x}{dx} = V - H\frac{dy}{dx} - \overset{x}{\Sigma}P = V_x - H\operatorname{tg}\varphi$$

und wegen $dx = ds\cos\varphi$ sowie mit Rücksicht auf 32)

$$\frac{dM_x}{ds} = T_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 35$$

Für mathematische Maxima und Minima von M_x lautet also die Bedingung

$$T_x = 0 \quad \text{oder} \quad V_x = H\operatorname{tg}\varphi, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 36$$

es steht an den betreffenden Stellen R_x normal zum Querschnitt

Gleichung 30) geht für x = l über in

$$M_1 = M' = M + Vl - Hc - \overset{1}{\Sigma}P(l-a) \text{ woraus}$$

$$V = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hc + \overset{1}{\Sigma}P(l-a)\right] \quad . \quad 37$$

Substituirt man diesen Werth in 29) so folgt für x = l

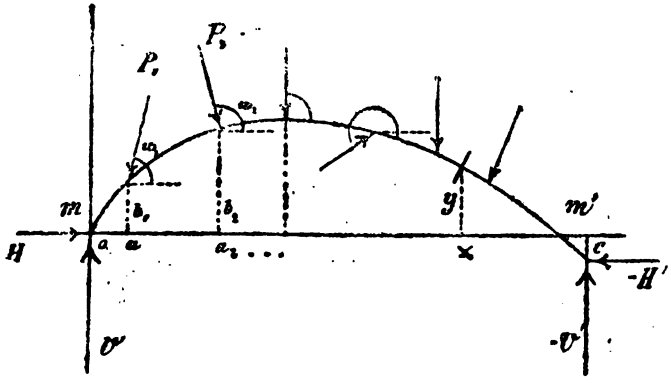
$$V' = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hc - \overset{1}{\Sigma}Pa\right] \quad . \quad . \quad . \quad 38$$

Sobald M, M', H bekannt sind, können mittelst der gegebenen Formeln V, V' sowie Momente und Kräfte in allen Querschnitten bestimmt werden.

Sämmtliche gegebene Gleichungen gehen mit $\varphi = 0$, $y = 0$, $c = 0$, in die für gerade Träger gültigen über.

Nehmen wir an, dass nicht nur Lasten, also verticale Kräfte, sondern beliebige in der Bogenebene liegende Kräfte angreifen (Fig. 10) Die P_1, P_2, ... wirken unter Winkeln

Fig. 10.



ω_1, ω_2, ... und ihre Angriffspunkte liegen bei a_1, b_1, a_2, b_2, ... Es ergeben sich dann ganz wie oben

$$H_x = H - \overset{x}{\Sigma} P \cos\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 28_a$$

$$V_x = V - \overset{x}{\Sigma} P \sin\omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 29_a$$

$$M_x = M + Vx - Hy - \overset{x}{\Sigma} P(x-a)\sin\omega + \overset{x}{\Sigma} P(y-b)\cos\omega \quad 30_a$$

und ist also jetzt der Horizontalschub nicht mehr constant. Weiter werden (Fig. 9)

$$N_x = V_x \sin\varphi + H_x \cos\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 31$$

$$T_x = V_x \cos\varphi - H_x \sin\varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 32_a$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{V_x}{H_x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 33_a$$

$$R_x = \frac{H_x}{\cos\psi} = \frac{V_x}{\sin\psi} = \sqrt{H_x^2 + V_x^2} = \sqrt{N_x^2 + T_x^2} \quad 34_a$$

Differenzirt man die Gleichung für M_x nach x, so folgt (Note 1)

$$\frac{dM_x}{dx} = V - Ht\,g\varphi - \overset{x}{\Sigma} P \sin\omega + \overset{x}{\Sigma} P \cos\omega tg\,\varphi = V_x - H_x tg\,\varphi$$

oder wegen $dx = ds\cos\varphi$ und 32_a

$$\frac{dM_x}{ds} = T_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 35$$

Diese Beziehung gilt also ganz allgemein für beliebig belastete und durch Wärme beeinflusste gerade und krumme Träger*), ebenso die Bedingung für Maxima und Minima von M_x

$$T_x = 0, \quad V_x = H_x tg\,\varphi \ldots\ldots 36_a$$

Aus den Gleichungen 29_a) und 30_a) folgen ganz wie oben aus 29) und 30)

$$V = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hc + \overset{1}{\Sigma} P(1-a)\sin\omega - \overset{1}{\Sigma} P(c-b)\cos\omega\right] \quad 37_a$$

$$V' = \frac{1}{l}\left[M' - M + Hc - \overset{1}{\Sigma} Pa\sin\omega - \Sigma P(c-b)\cos\omega\right] \quad 38_a$$

Natürlich gelten auch alle Gleichungen der §§ 1, 2, 4 wie bei verticalen Kräften.

§. 4. Spezifische Transversalkraft und spezifische Längsschubkraft.

Es seien vorübergehend Axialkraft und Moment für einen Querschnitt x (Fig. 11) durch N, M und für einen um ds entfernten Querschnitt durch N', M' bezeichnet. Dann ist die Resultante sämmtlicher angreifenden Normalkräfte eines zwischen $\eta = \eta$ und $\eta = a_1$ gelegenen Theils des Querschnitts x nach 8_a)

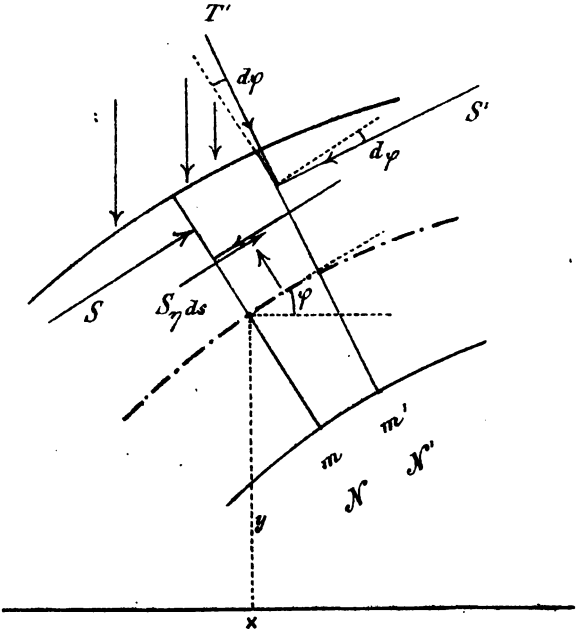
$$S = \overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}} \mathfrak{F} N_\eta = \frac{N}{F} \overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}} \mathfrak{F} + \frac{M}{\Theta} \overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}} \mathfrak{F}\eta$$

*) Ganz scharf ist 35) übrigens nur bei horizontaler Axe und zwar desshalb, weil genau genommen, in §. 3 alle Σ sich nicht auf die P vor x, sondern auf diejenigen vor der Querschnittsebene beziehen sollten. Beide Summen stimmen aber nur bei horizontaler Axe immer überein.

und die Resultante sämmtlicher widerstehenden Normalkräfte des um ds entfernten entsprechenden Querschnittstheils

$$S' = \frac{N'}{F}\sum_{\eta}^{a_1}\mathfrak{F} + \frac{M'}{\Theta}\sum_{\eta}^{a_1}\mathfrak{F}_\eta$$

Fig. 11.



Hieraus folgt

$$S' - S = \frac{N' - N}{F}\sum_{\eta}^{a_1}\mathfrak{F} + \frac{M' - M}{\Theta}\sum_{\eta}^{a_1}\mathfrak{F}_\eta$$

$$S' - S = \frac{dN_x}{F}\sum_{\eta}^{a_1}\mathfrak{F} + \frac{dM_x}{\Theta}\sum_{\eta}^{a_1}\mathfrak{F}_\eta$$

Die beiden an der untern Grenze des schraffirten Trägerheils zusammenhängenden Flächen werden sich im Allgemeinen gegeneinander zu verschieben suchen. Die Kraft, welche in der untern Hälfte darauf hinwirkt, bezeichnen wir durch S_η ds und soll dieselbe als positiv gelten, wenn sie von der Richtung der wachsenden s ist. S_η bezieht sich (bei Vernachlässigung ∞ kleiner Grössen) auf die Längeneinheit und ganze Trägerbreite bei η, dieser Werth mag „spezifische Längsschubkraft"

heissen. Wenn nun T' die Transversalkraft von η bis a_1 in der Fläche rechts des schraffirten Trägertheils, so lautet für diesen die Bedingung „Summe aller Kräfte || S gleich 0“:

$$S_\eta ds + S - S' \cos d\varphi - T' \sin d\varphi - \sin\varphi d\overset{x}{\Sigma} P = 0$$

$$S_\eta ds = S' - S + T' d\varphi + \sin\varphi d\overset{x}{\Sigma} P$$

oder mit Rücksicht auf den Werth von S' — S

$$S_\eta = \frac{1}{F}\frac{dN_x}{ds}\overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F} - \frac{1}{\Theta}\frac{dM_x}{ds}\overset{a}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F}_\eta + T'\frac{d\varphi}{ds} + \sin\varphi\frac{d\overset{x}{\Sigma} P}{ds}$$

Aus 31 mit 29 folgt

$$\frac{dN_x}{ds} = T_x\frac{d\varphi}{ds}, - \sin\varphi\frac{d\overset{x}{\Sigma} P}{ds}$$

Nach Substitution dieses Werthes und von 35 erhält man die spezifische Längsschubkraft bei x, η

$$S_\eta = \frac{T_x}{\Theta}\overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F}\eta + \sin\varphi\frac{d\overset{x}{\Sigma} P}{ds}\left(1 - \frac{\overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F}}{F}\right) + \frac{d\varphi}{ds}\left(T_x\frac{\overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F}}{F} + T'\right), \quad (39$$

Gleichung 39 liefert wie es sein muss für $\eta = a$ wegen $\overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F} = 0$, $\overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F}_\eta = 0$, $T' = 0$

$$S_\eta = \sin\varphi\frac{d\overset{x}{\Sigma} P}{ds}$$

und für $\eta = -a_2$ wegen $\overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F} = F$, $\overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F}\eta = 0$, $T' = -T_x$

$$S_\eta = 0.$$

Da jedoch im dritten Glied die Summanden beide kleiner als T_x und von verschiedenen Vorzeichen sind, da ferner $\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{r}$ (r Krümmungsradius bei x), also sehr klein ist, so können wir dies dritte Glied mit demselben Rechte vernachlässigen, mit dem wir 8) in 8_a) vereinfachten. Das zweite Glied in 39) ist bei concentrirten Lasten allein zwischen je 2 aufeinanderfolgenden P gleich Null und bei stetig vertheilten Lasten klein genug, um in allen practischen Fällen setzen zu können

$$S_\eta = \frac{T_x}{\Theta}\overset{a_1}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F}_\eta \quad (40$$

Diese Gleichung ist um so genauer, je flacher der Bogen ist und für horizontale Träger wegen $\varphi = 0$ vollständig richtig.

Wären nicht nur Lasten, sondern beliebig gerichtete Kräfte vorhanden gewesen, so würde sich in analoger Weise wie oben vorgehend, jedoch mit Rücksicht auf 31a) 29a) ergeben haben

$$S_\eta = \frac{T_x}{\Theta} \sum_{\eta}^{a_1} \mathfrak{F}_\eta + \frac{d \Sigma P \cos(\omega - \varphi)}{ds} \left(1 - \frac{\sum_{\eta}^{a_1} \mathfrak{F}}{F}\right) + \frac{d\varphi}{ds} \left(T_x \frac{\sum_{\eta}^{a_1} \mathfrak{F}}{F} + T'\right) \quad \cdot \quad (39a$$

welche Gleichung jedoch ebenfalls mit genügender Genauigkeit durch 40) ersetzt wird.

Wie man sieht, ändert sich S_η sowohl mit dem Querschnitt als mit der Entfernung von der Axschicht. Für einen bestimmten Querschnitt ist S_η am grössten in der Axschicht nämlich mit Rücksicht auf 25)

$$S_0 = \frac{T_x}{\Theta} \sum_{0}^{a_1} \mathfrak{F}\eta = \frac{T_x}{\mathfrak{h}} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad 41$$

Bei Bogenträgern mit dünnen Wandungen (Blechträger), kann noch näherungsweise $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_0$ (Entfernung der Gurtungsschwerpunkte) gesetzt werden und nimmt dann der Werth S_η von der Axschicht bis zum Beginn der Gurtungen nur wenig ab. Bei gleichem η ändert sich S_η proportional der Transversalkraft T_x, erreicht also auch in den gleichen Querschnitten wie diese ihre grössten Werthe.

Unter „spezifischer Transversalkraft" T_η in irgend einer Entfernung η von der Axschicht soll verstanden sein derjenige Theil der Transversalkraft T_x, welcher an genannter Stelle pro Höheneinheit und auf die ganze Breite b des Querschnitts zu rechnen ist. Betrachten wir nun an der Stelle x, η ein Trägerelement (Fig. 12) von den Dimensionen b, $d\eta$, ds_η, so wirken auf dieses Element nach dem Bisherigen 6 Kräfte, welche, wenn wir die Normalkraft pro Höheneinheit und auf die Breite b $G_\eta = b N_\eta$ bezeichnen und bei Vernachlässigung

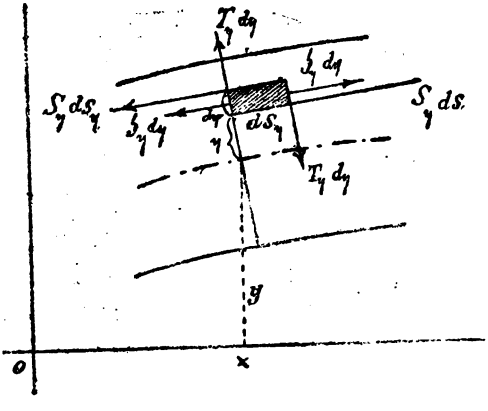
unendlich kleiner Grössen zweiter Ordnung die in Fig. 12 eingeschriebenen Werthe haben. Das Gleichgewicht gegen Drehung verlangt nun

$$T_\eta d\eta \,.\, ds_\eta = S_\eta ds_\eta \,.\, d\eta \qquad \text{woraus}$$

$$T_\eta = S_\eta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 41$$

An jeder Stelle x, η eines Bogenträgers ist die spezifische Transversalkraft gleich der spezifischen Längsschubkraft.

Fig. 12.



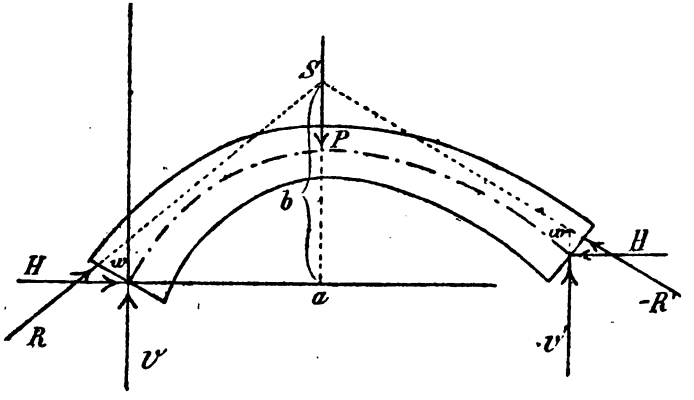
Man kann nun durch einfache Zusammensetzung in der Fig. 12 angegebenen Kräfte auch die spezifischen Beanspruchungen in beliebigen Richtungen, sowie deren Maxima und Minima erhalten, kommt aber dabei auf dieselben Formeln und Linien (Spannungstrajectionen), wie in der Theorie der geraden Träger. Da sich also nichts Neues ergibt und die schiefen Spannungen bei Berechnung der Bogenträger ohne Bedeutung sind, so will ich hier nicht weiter darauf eingehen.

§. 5. Schnittlinie und Umhüllungslinien der Kämpferdrücke.

Auf einen beliebigen Bogenträger wirke eine einzelne Last oder ein Lastelement P (Fig. 13). Hiedurch werden gewisse Gegendrücke $R, -R'$ der Kämpfer hervorgerufen, die

sich mit P ins Gleichgewicht setzen, so dass P, R und R′ durch einen Punkt S gehen. Die Abscisse a des Schnittpunktes S ist die des Angriffspunktes von P, die Ordinale b findet sich

Fig. 13.



wie folgt. In Bezug auf S ist das Moment von R gleich Null. Da aber R durch H, V und M ersetzt wird, so hat man

$$M + Va - Hb = 0 \qquad \text{woraus}$$

$$b = \frac{M + Va}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 42$$

Mit der Lage der Last P ändert sich auch die Lage des Schnittpunktes S. Lässt man P nach einander alle Lagen von $a = o$ bis $a = l$ durchlaufen, so beschreibt der Punkt S eine stetige Curve, welche „Schnittlinie der Kämpferdrücke“ oder kurz „Linie S“ heissen mag. Diese wichtige Linie, deren allgemeinste Gleichung durch 42) gegeben ist, scheinen ziemlich gleichzeitig (1867) Fränkel und Winkler aufgefunden zu haben.

Bezeichnet man die Ordinaten derjenigen Punkte, in welchen R und R′ die Verticalen bei o und l schneiden durch w, w′, so hat man weil in Bezug auf den ersteren Schnittpunkt das Moment von R in Bezug auf den letzteren das Moment von R′ gleich Null sein muss

$$M - Hw = 0, \qquad M' - H(w' - c) = 0 \qquad \text{woraus}$$

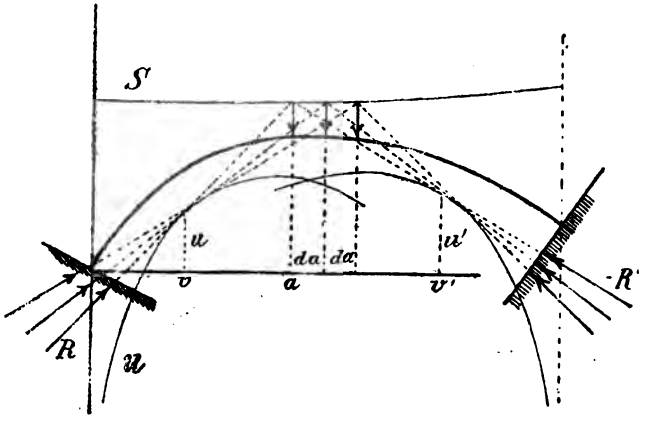
$$w = \frac{M}{H}, \quad w' = c + \frac{M'}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 43$$

Für die Winkel, welche R, R' mit der Abscissenaxe bilden, folgen aus 33)

$$\operatorname{tg}\psi_0 = \frac{V}{H}, \quad \operatorname{tg}\psi_1 = \frac{V'}{H} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 44$$

Mit der Aenderung von a nimmt nicht nur der Punkt S einen anderen Ort ein, sondern es gerathen auch die Richtungslinien der Kämpferdrücke R, R' in andere Lagen. Gehen wir von irgend einem Anfangswerth a aus (Fig. 14) und lassen a und da wachsen, so werden auch die genannten Richtungslinien ihre Lagen nur unendlich wenig ändern, wobei sich aber doch die vorige R- linie und die neue R- linie in einem Punkte v, u schneiden müssen, und ebenso die vorige und die neue R' - linie in einem Punkte v', u'. Gehen wir wieder um da weiter

Fig. 14.



so schneidet sich die entstehende dritte R-linie mit der zweiten R - linie und ebenso die dritte R'-linie mit der zweiten R' linie. Fährt man so fort und verbindet dann alle Schnittpunkte v, u aufeinanderfolgender R- linien, so erhält man eine Umhüllungslinie der Kämpferdrücke R"; ebenso erhält man

durch Verbindung aller Schnittpuncte v', u' eine „Umhüllungslinie der Kämpferdrücke R'". Wir wollen die erste auch einfach „Linie U", die zweite „Linie U'" nennen. Derartige Linien kommen zuerst bei Winkler vor.

Es sollen nun für eine beliebige Lage a der Last die Coordinaten des Schnittpunkts der zwei unendlich benachbarten R-linien abgeleitet werden. Sind v_1 u_1 die laufenden Coordinaten der R-linie für die Lage a, so ist die Gleichung dieser Linie

$$u_1 = w + v_1 \operatorname{tg}\psi_0$$

Gehen wir nun um d a weiter, so ändern sich w um d w, $\operatorname{tg}\psi_0$ um $d\operatorname{tg}\psi_0$ und die Gleichung der neuen R-linie lautet, wenn v_2, u_2 ihre laufenden Coordinaten,

$$u_2 = w + dw + v_2(\operatorname{tg}\psi_0 + d\operatorname{tg}\psi_0)$$

Für den Durchschnitt beider Linien ist $u_1 = u_2 = u$, $v_1 = v_2 = v$, also durch Subtraction

$$0 = dw + v\,d\operatorname{tg}\psi_0 \quad \text{woraus und womit}$$

$$v = -\frac{dw}{d\operatorname{tg}\psi_0}$$

$$u = w - \operatorname{tg}\psi_0 \frac{dw}{d\operatorname{tg}\psi_0}$$

Substituirt man in diese Formeln die aus 43) 44) folgenden Werthe von d w und $d\operatorname{tg}\psi_0$ so folgen

$$v = \frac{H\,dM - M\,dH}{V\,dH - H\,dV} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 45$$

$$u = \frac{V\,dM - M\,dV}{V\,dH - H\,dV} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 46$$

worin alle Differenziale sich auf ein variables a beziehen.

Sind die Ausdrücke für V, H, M ermittelt, so kann man dieselben nach a differenziren und so aus 45) 46) die Coordinaten des Schnittpunktes je zweier auf einanderfolgender R-linien erhalten. Wird dann mittelst einer der beiden Gleichungen a aus der andern eliminirt, so erhält man in der entstehenden Beziehung zwischen u und v die Gleichung der Umhüllungslinie U. Es lassen sich jedoch V, H, M erst dann

durch lauter bekannte Grössen ausdrücken, wenn Näheres über die Form des Trägers bekannt ist.

Die Gleichung der R'- linie ist für den Angriffspunkt a der Last

$$u_1 = w' - (1 - v_1) \operatorname{tg} \psi_1$$

Mittelst dieser Gleichung erhält man in ganz analoger Weise wie oben die Coordinaten des Schnittpunktes je zweier unendlich benachbarter R'- linien

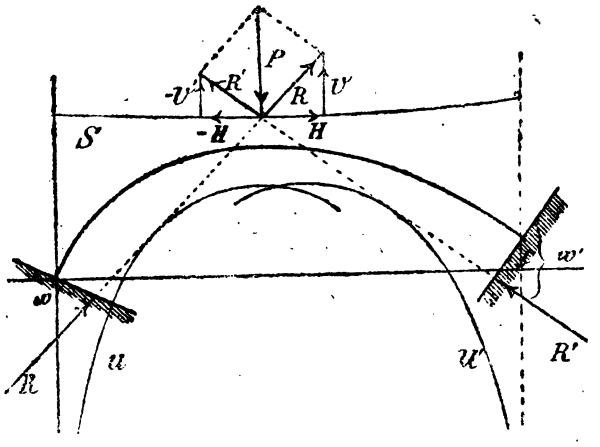
$$v' = l - \frac{H dM' - M' dH}{V' dH - H dV'} \quad \ldots\ldots \quad 47$$

$$u' = c + \frac{V' dM' - M' dV'}{V' dH - H dV'} \quad \ldots\ldots \quad 48$$

und kann hieraus durch Elimination von a die Gleichung der Umhüllungslinie U' erhalten werden. Gewöhnlich interessirt diese Gleichung allerdings desshalb nicht, weil für symmetrisch geformte Träger die Umhüllungslinien U und U' symmetrisch zur Verticalen durch den Scheitel liegen.

Sind für einen Träger die Linien S, U, U' verzeichnet, so ist es sehr leicht, die von irgendwelcher an beliebiger

Fig. 15.



Stelle a angreifenden Last P hervorgerufenen R, R', V, V', H graphisch zu erhalten, wie dies in Fig. 15 angedeutet ist. Die Momente M, M' ergeben sich nach Abgreifen von w, w' aus 43). Für eine Gesammtbelastung wären die von den Einzellasten herrührenden Werthe zu addiren, doch machen wir keinen Gebrauch hievon.

Es mag schon jetzt erwähnt werden, dass bei frei drehbaren Bogenenden (Bogenträger mit Kämpfergelenken) wegen $M = 0$, $M' = 0$, $dM = 0$, $dM' = 0$ für jede Lage der Last aus 45) — 48)

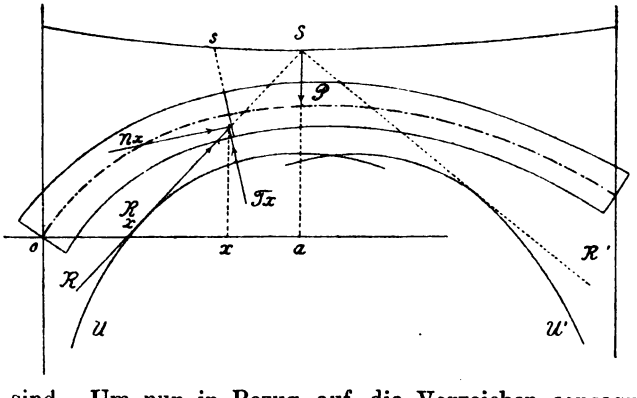
$$v = 0 \qquad v' = l$$
$$u = 0 \qquad u' = c$$

Die Umhüllungslinien der Kämpferdrücke sind Punkte, die Kämpferdrücke R und R' gehen stets durch die Gelenkpunkte bei 0 und l.

§ 6. Ungünstigste Belastungen.

In jedem Querschnitt x hängen 2 Flächen zusammen. Suchen die Kräfte und Momente links von x die Fläche daselbst von der rechts von x zu trennen (Fig. 1), so müssen von dieser her solche Kräfte und Momente wirken, welche den Ersteren nummerisch gleich, aber von entgegengesetzter Rich-

Fig. 16.

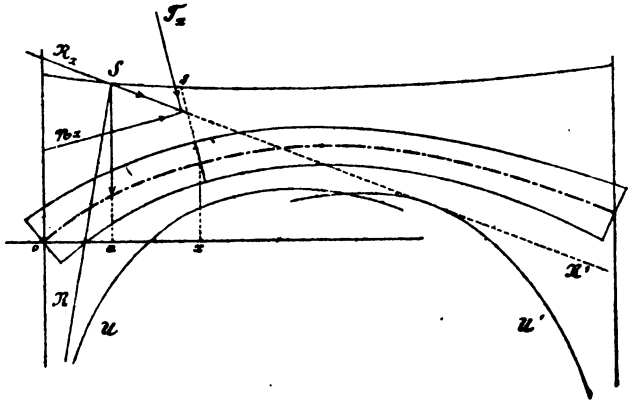


tung sind. Um nun in Bezug auf die Vorzeichen consequent

zu sein, haben wir unter den Kräften und Momenten im Querschnitt x stets die von der Fläche links von x aus wirkenden verstanden. Wir haben ferner M_x dann als positiv bezeichnet, wenn es wie der Zeiger der Uhr rechts herum dreht, N_x wenn es drückend also gegen den Querschnitt wirkt, und T_x wenn es nach oberhalb der Axschicht gerichtet ist. Hält man hieran fest, so hat es keine Schwierigkeit, die ungünstigsten Belastungen selbst in abnormen Fällen anzugeben.

Denkt man sich auf einen beliebig geformten Bogenträger zunächst nur eine Last P an beliebiger Stelle a wirken, so halten dieser das Gleichgewicht gewisse Kämpferreactionen, R, R', deren Lage und Richtung sich nach Fig. 15 finden. Die Abscisse des Schnittpunctes der Querschnittsebene x mit Linie S bezeichnen wir durch s und hat man dann für die Resultante der im Querschnitt x wirkenden Kräfte $R_x = R$

Fig. 17.



wenn $a > s$ (Fig. 16) und $R_x = R'$ wenn $a < s$ (Fig. 17) Die Richtungen und Lagen von N_x und T_x ergeben sich durch einfache Zerlegung von R_x in Componenten $\perp$ und $\parallel$ der Querschnittsebene.

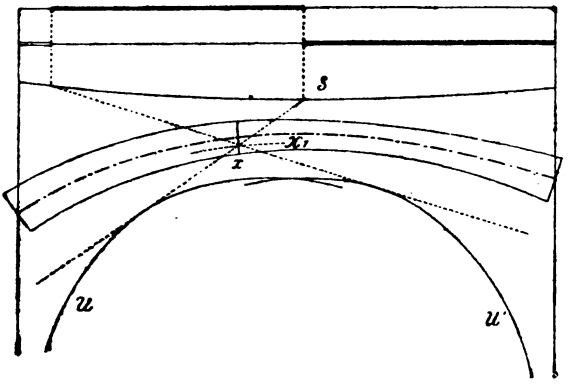
Normalkraft. Der Beitrag einer Last P zur Normalkraft N_x würde gleich Null (Fig. 16, 17)

1) für $a > s$, wenn die Tangente von Punct S an Linie U $\parallel$ der Querschnittsebene stände;
2) für $a < s$, wenn die Tangente von Punct S an Linie U' $\parallel$ der Querschnittsebene stände.

Beide Fälle kommen aber practisch gar nicht vor und es tragen daher alle Lasten auf dem Träger in gleichem Sinne zu N_x bei und wird N_x um so grösser je stärker (Totalbelastung) und um so kleiner je schwächer (Eigengewicht) die Belastung. Für nach oben gekrümmte Träger ist N_x stets Druck und positiv, für nach unten gekrümmte Zug und negativ.

Normalspannungen. Diejenigen Werthe N_1, N_2 der Normalspannungen, zwischen welchen alle anderen liegen, treten in der obersten und untersten Faser ein. Bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen kommt eventuell nur hinzu,

Fig. 18.

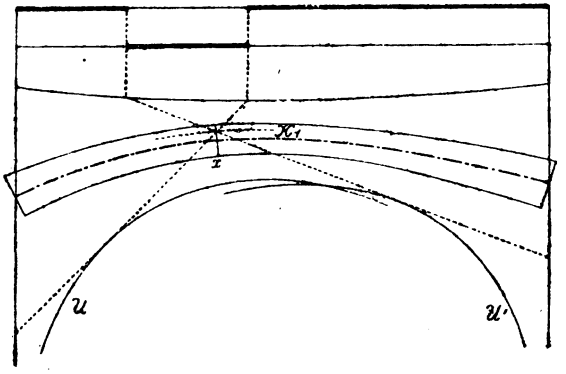


dass die übrigen Fasern der gleichen Gurtung ebenso stark beansprucht werden. Es genügt also für die Dimensionenberechnung, die Grenzwerthe von N_1, N_2 zu kennen. Nun wissen wir nach § 2, dass nur solange N_1 mit N_x von gleichem Vorzeichen ist, als R_x oberhalb des untern Kernpunctes K_2

angreift (Fig. 18). Zieht man daher durch K_2 Tangenten an die Umhüllungslinien U und U' bis zu den Schnittpuncten mit Linie S, so vergrössert in dem nach oben gekrümmten Träger jede Last in der mittleren Strecke den Druck, jede Last in den beiden äusseren Strecken den Zug in der obersten Faser, es deuten in Fig. 18 fette Striche an, welche Strecken möglichst stark (Totalbelastung), feine, welche Strecken möglichst schwach (Eigengewicht) zu belasten sind, wenn die Grenzwerthe von N_1 entstehen sollen.

Auf ganz analoge Weise erhält man die ungünstigsten Belastungen für N_2. Wir wissen, dass nur so lange Spannungen von gleichem Vorzeichen wie N_x in der untersten Faser entstehen, als R_x unterhalb des oberen Kernpunctes K_1 angreift (Fig. 19). Zieht man also durch K_1 Tangenten an U und U' bis zu den Schnittpuncten mit Linie S, so tragen in

Fig. 19.

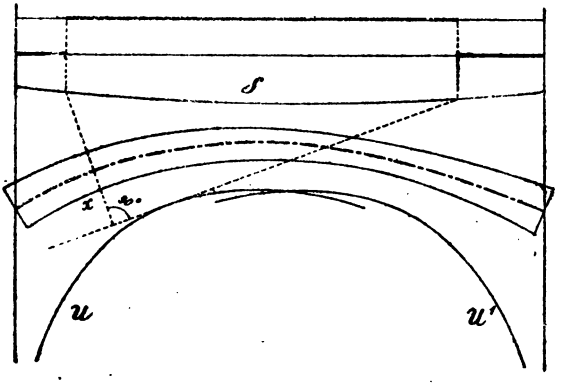


dem nach oben gekrümmten Träger alle Lasten in den beiden äusseren Strecken zum Druck, alle Lasten in der mittleren Strecke zum Zug in der untersten Faser bei, es sind in Fig. 19 die Belastungen für die Grenzwerthe von N_2 angedeutet. — Bei nach unten gekrümmtem Träger zeigt sich bei gleichem Vorgehen wie hier, dass für alle Strecken feine durch fette Striche zu ersetzen sind und umgekehrt.

Schubkräfte. Der Beitrag einer Last P zur Transversalkraft T_x ist gleich Null (Fig. 16, 17)

1) für $a > s$, wenn die Tangente von Punct S an Linie U ⊥ der Querschnittsebene steht;

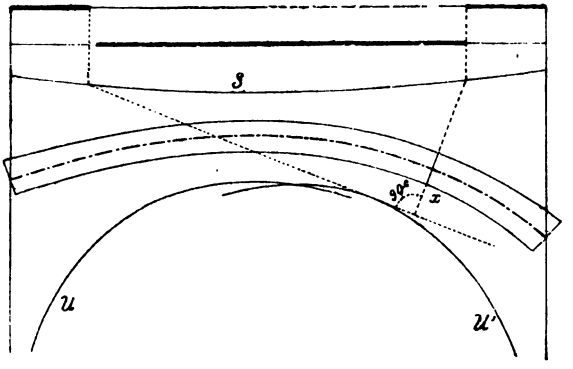
Fig. 20



2) für $a < s$, wenn die Tangente von Punct S an Linie U' ⊥ der Querschnittsebene steht;
3) wenn $a = s$ ist, in welchem Falle der Beitrag sein Vorzeichen wechselt, also den Werth Null durchschreitet.

Für die zwischenliegenden a ergeben sich die Richtungen oder Vorzeichen der Beiträge wie in Fig. 16, 17 und deuten

Fig. 21.



also Fig. 20, 21 die Belastungen für die Grenzwerthe von T_x

in den betreffenden Querschnitten an. Bei nach unten gekrümmtem Trüger wäre ganz analog zu verfahren. Da nach § 4 specifische Transversalkraft und Längsschubkraft proportional T_x sind, so hat man mit den ungünstigsten Belastungen für Letztere auch die für Erstere.

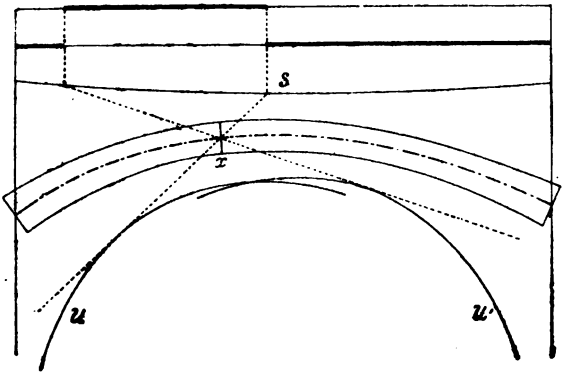
Momente. Für das Moment M_x hat man nach § 2

$$M_x = e N_x$$

worin das Vorzeichen von N_x unveränderlich, e aber die Entfernung des Angriffspunctes von R_x oder N_x von der Axschicht in der Querschnittsebene gemessen. Es ist also

1) bei nach oben gekrümmtem Träger M_x positiv oder negativ, je nachdem e positiv oder negativ, d. h. je nachdem R_x oberhalb oder unterhalb der Axschicht angreift;

Fig. 22.



2) bei nach unten gekrümmtem Träger M_x negativ oder positiv, je nachdem e positiv oder negativ, d. h. je nachdem R_x oberhalb oder unterhalb der Axschicht angreift.

Greift R_x in der Axschicht an, so ist $M_x = 0$. Mit Rücksicht auf das oben über R_x Gesagte sind also bei dem in Fig. 22 angedeuteten Bogenträger die ungünstigsten Belastungen wie beigesetzt ermittelt. —

Je geringer die Entfernungen der Kernlinien von der Axschicht unter gleichen Verhältnissen der Letzteren, umsomehr nähern sich die Belastungsgrenzen für

max druck N_1, max pos M_x, min druck N_2, sowie für
min druck N_1, max neg. M_x, max druck N_2

Da nun der Einfluss der Lasten in der Nähe der Belastungsgrenzen überhaupt sehr klein ist, so wird es in sehr vielen Fällen genügen, die ungünstigsten Belastungen für M_x auch als solche für N_1, N_2 zu verwenden, d. h. die Kernlinien ganz aus dem Spiele zu lassen. Für Bogen mit durchbrochenen Wandungen fallen die Kernlinien mit den Gurtungsschwerlinien zusammen.

Bei Bogen mit Kämpfergelenken sind die Umhüllungslinien U, U' zu Puncten, den Gelenkpuncten, zusammengeschrumpft. Die oben als Tangenten an U, U' erwähnten Linien sind dann durch die Gelenke bei 0 und 1 gezogene Gerade.

Die Construction der drei Belastungsstrecken ergibt häufig, dass die mittlere Strecke bis ans Trägerende oder über dieses hinaus reicht, so dass nur e i n e äussere Strecke in Betracht kommt.

II. Besondere Arten von Bogenträgern.

Die in diesem Abschnitt abzuleitenden Beziehungen gelten für alle Formen der betrachteten Trägerarten, nach oben oder unten gekrümmt, symmetrisch oder nicht, constanten oder variablen Querschnitts bei beliebiger Belastung und beliebigen Temperaturen.

Die statisch bestimmten Träger der §§ 7—9 sind mit diesem Abschnitt erledigt, abgesehen von den Formänderungen, welche gewöhnlich nicht interessiren. In Bezug auf Letztere und die Träger in §§ 10—11 erübrigt nur noch die Ableitung einiger bestimmter Integrale, welche von den spe-

ciellen Trägerformen abhängt und mit der eigentlichen Theorie nichts zu thun hat. Ueber besondere Belastungsarten siehe Note 2.

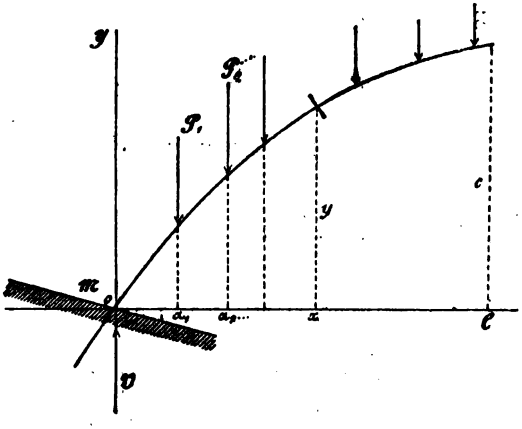
§ 7. Bogen mit einem festgespannten und einem freischwebenden Ende.

Wir legen den Ursprung der Coordinaten in den Schwerpunct des Querschnitts an der Einspannungsstelle und sind dann in den Gleichungen des § 3 (Fig. 23) $M' = 0$, $V' = 0$, $H = H_1 = 0$. Daher aus 38) Moment bei 0

$$M = -\sum_{1}^{l} P\,a \quad \ldots\ldots\ldots \quad (49$$

und mit Rücksicht hierauf aus 37) Verticalreaction bei 0

Fig. 23.



$$V = \sum_{1}^{l} P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50$$

Die Substitution der nun bekannten Werthe in 29)—32) ergibt Moment, Verticalkraft, Normalkraft und Transversalkraft bei x

$$M_x = M + V\,x - \sum_{1}^{x} P\,(x - a) = -\sum_{x}^{l} P\,(a - x) \quad \ldots \quad (51$$

$$V_x = V - \sum_{1}^{x} P = \sum_{x}^{l} P \quad \ldots\ldots\ldots \quad (52$$

$$N_x = V_x \sin\varphi = \sin\varphi \sum_x^l P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53$$

$$T_x = V_x \cos\varphi = \cos\varphi \sum_x^l P \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54$$

Die Resultante aller in einem Querschnitt angreifenden Kräfte ist $R_x = \sqrt{H^2 + V_x^2} = V_x$ und ihre Richtung natürlich mit der von V_x übereinstimmend, also vertical, wie auch aus $\operatorname{tg}\psi = V_x : H = \pm\infty$ hervorgeht. Für die Normalspannungen N_η, N_1, N_2, die specifischen Transversal- und Längsschubkräfte T_η, T_0, S_η, S_0 und die Entfernung e des Angriffspunctes von N_x oder R_x von der Axschicht gelten ohne Aenderung die in den §§. 1—4 gegebenen Formeln.

Die Aenderung des Winkels φ der Balkenaxe mit dem Horizont bei x ist wegen $\Delta\varphi_0 = 0$ aus 11)

$$\Delta\varphi = \int_0^x X\,ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55$$

und die Aenderung der Coordinaten x, y nach 9) 10)

$$\Delta x = -\int_0^x \Delta\varphi\,dy + \int_0^x Y\,dx \qquad (56$$

$$\Delta y = \int_0^x \Delta\varphi\,dx + \int_0^x Y\,dy \qquad (57$$

In diesen Gleichungen sind X, Y durch § 1 und in allen practischen Fällen genügend genau durch 6a) 7a) bestimmt.

Wird der Träger nicht nur von Lasten, sondern von beliebigen in der Bogenebene wirkenden Kräften ergriffen, so folgt mit $M' = 0$, $V' = 0$, $H_1 = 0$ aus 28a) die Horizontalkraft bei x

$$H = \sum^l P\cos\omega$$

aus 38a) das Moment bei 0

$$M = -\sum^{l} P a \sin\omega + \sum^{l} P b \cos\omega$$

und aus 37_a) die Verticalkraft bei 0

$$V = \sum^{l} P \sin\omega$$

Mit den hiernach bekannten Werthen liefern die Gleichungen 28_a) — 30_a)

$$M_x = -\sum_{x}^{l} P (a - x) \sin\omega + \sum_{x}^{l} P (b - y) \cos\omega$$

$$V_x = \sum_{x}^{l} P \sin\omega$$

$$H_x = \sum_{x}^{l} P \cos\omega$$

während N_x, T_x, R_x, ψ sowie die Normalspannungen und Schubkräfte durch die Formeln des ersten Abschnitts bestimmt bleiben, in welchem nur H_x an Stelle von H tritt. Für die Formänderungen gelten die Relationen. 55)—57)

Der zuletzt betrachtete Fall kommt auch bei Röhrenkrahnen vor, wo aber nur ein P, nämlich die Kettenspannung, nicht vertical wirkt.

§ 8. Bogen mit unendlich vielen Gelenken, Kettenlinien.

Bogenträger mit stetig aufeinander folgenden Gelenken heissen „Ketten", alle Curven, welche die Axen derselben bilden können, werden als „Kettenlinien" bezeichnet. Da hier für alle Querschnitte $M_x = 0$ und wie immer

$$\frac{dM_x}{ds} = T_x \qquad\qquad M_x = e N_x$$

so können bei Ketten nie Transversalkräfte entstehen und muss die Resultante $R_x = N_x$ überall normal dem Querschnitt oder tangential der Kettenlinie wirken und in der Axschicht angreifen.

Aus 30) folgt die allgemeinste und zugleich einfachste Gleichung aller Kettenlinien für verticale Lasten

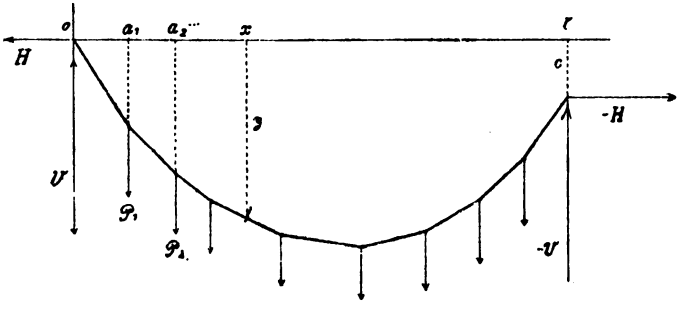
$$y = \frac{1}{H}\left[V\,x - \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)\right] \quad . \quad . \quad . \quad (58$$

30.) würde die Gleichung für beliebige Lasten liefern. Die Verticalreactionen der Stützpuncte (Pilonen) werden nach 37) 38)

$$V = \frac{1}{l}\left[\overset{l}{\Sigma} P\,(l-a) + Hc\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (59$$

$$-V' = \frac{1}{l}\left[\overset{l}{\Sigma} P\,a \qquad -Hc\right] \quad . \quad . \quad . \quad (60$$

Fig. 24.



Wegen

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\psi = \frac{V_x}{H} \quad \text{und} \quad V_x = V - \overset{x}{\Sigma} P \quad . \quad . \quad (61$$

liegt der Kettenscheitel in demjenigen Querschnitt x, für welchen V_x den Werth Null, d. h. auch $\overset{x}{\Sigma} P$ den Werth V durchschreitet.

Um das Problem weiter verfolgen zu können, muss noch eine Angabe gemacht sein, denn es ist klar, dass die Form der Kette nicht nur von l, c und der Belastung, sondern auch von der Kettenlänge abhängt. Wäre z. B. für einen Querschnitt x, der nicht mit einem Stützpunct zusammenfällt, die Ordinate y gegeben, so würde aus 58) und 59) der Horizontalschub

$$H = \frac{x\overset{l}{\Sigma} P\,(l-a) - l\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)}{l\,y - c\,x} \quad . \quad . \quad . \quad (62$$

oder wäre für einen Querschnitt x abgesehen vom Scheitel der Neigungswinkel φ bekannt, so würde aus 61) mit 59)

$$H = \frac{\overset{l}{\Sigma} P(l-a) - l \overset{x}{\Sigma} P}{l \operatorname{tg} \varphi - c} \quad \ldots \quad (63$$

In practischen Fällen pflegt ausser l, c und der Belastung noch der Pfeil $y = f$ der Kette gegeben zu sein. Um dann 62) zur Bestimmung von H verwenden zu können, muss erst die Abscisse $x = g$ des Scheitels, d. h. der Ordinate $y = f$*), ermittelt werden. Durch Gleichsetzen der beiden letzten Ausdrücke folgt allgemein

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y \overset{l}{\Sigma} P(l-a) - y l \overset{x}{\Sigma} P + c \overset{x}{\Sigma} P a}{x \overset{l}{\Sigma} P(l-a) - l \overset{x}{\Sigma} P(x-a)}$$

und hieraus für $x = g$, $y = f$, $\varphi = 0$

$$\overset{x}{\Sigma} P(lf - ca) = f \overset{l}{\Sigma} P(l-a) \quad \ldots \quad (64$$

Der Kettenscheitel liegt in demjenigen Puncte $x = g$, für welchen der Ausdruck links den Werth rechts durchschreitet. Nachdem H bestimmt ist, findet sich allgemein

$$R_x = \sqrt{H^2 + V_x^2} \quad \ldots \quad (65$$

und nimmt also die Kettenspannung vom Scheitel aus nach den Pilonen hinzu.

Für Ketten mit gleich hohen Stützpuncten ist in allen obigen Gleichungen $c = 0$ zu setzen und werden z. B.

$$V = \frac{1}{l} \overset{l}{\Sigma} P(l-a) \quad \ldots \quad (66$$

$$-V' = \frac{1}{l} \overset{l}{\Sigma} P a \quad \ldots \quad (67$$

während die Abscisse des Scheitels

---

*) Man pflegt hier g nach unten und H nach aussen als positiv zu rechnen, die erste Annahme hat in unsern Gleichungen die zweite zur Folge, doch kann man auch consequent bleiben.

$$x=g \quad \text{wo } V_x=0 \quad \text{d. h } \overset{x}{\Sigma} P = V \quad . \; . \; . \; (68$$

und alsdann

$$H=\frac{1}{f}\left[V g - \overset{g}{\Sigma} P (g-a)\right] \quad . \; . \; . \; (69$$

Ist die Kette zur Mitte symmetrisch belastet, so hat man ohne Rechnung $g = \frac{l}{2}$.

Ganz wie hier für verticale P folgen aus den am Ende des § 3 gegebenen Formeln die Beziehungen für Ketten mit beliebig gerichteten P. Die Gleichungen und Gesetze aller möglichen Kettenlinien können aus den vorstehenden als specielle Fälle abgeleitet werden, Auch die Form und Längenverhältnisse der Kettenbrückenlinien lassen sich daraus genauer entwickeln als nach Navier. (Siehe hierüber §. 15.)

§ 9. Bogen mit drei Gelenken.

Der Bogen habe zwei Kämpfergelenke und ein drittes Gelenke an beliebiger Stelle $x = g$, $y = f$ (Fig. 25). Alsdann sind $M = 0$, $M' = 0$, $M_g = 0$, es werden nach 37) 38) die Verticalreactionen der Kämpfer

$$V=\frac{1}{l}\left[\overset{l}{\Sigma} P(l-a)+Hc\right] \quad . \; . \; . \; . \; (70$$

$$-V=\frac{1}{l}\left[\overset{l}{\Sigma} P a \qquad -Hc\right] \quad . \; . \; , \; . \; (71$$

und speciell für gleiche Stützhöhen mit $c=0$

$$V=\frac{1}{l}\overset{l}{\Sigma} P (l-a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (72$$

$$-V'=\frac{1}{l}\overset{l}{\Sigma} P a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (73$$

Aus 30) folgt mit $x=g$ der Horizontalschub

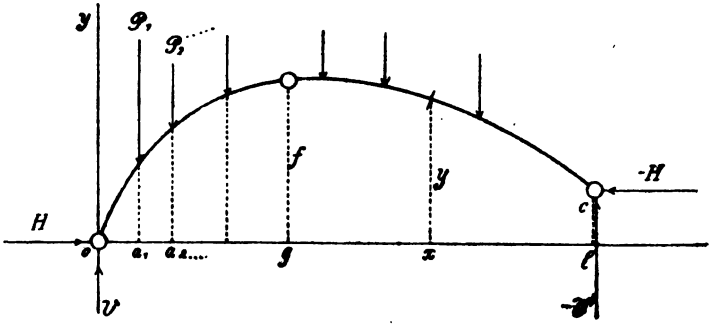
$$H=\frac{1}{f}\left[Vg-\overset{g}{\Sigma} P(g-a)\right] \quad . \; . \; . \; (74$$

oder nach Substitution des Werthes V

$$H=\frac{1}{fl-gc}\left[(l-g)\sum_{0}^{g}Pa+g\sum_{g}^{l}P(l-a)\right] \quad . \quad (75$$

Liegt eine Last gerade bei $a=g$, so ist es gleichgültig, ob

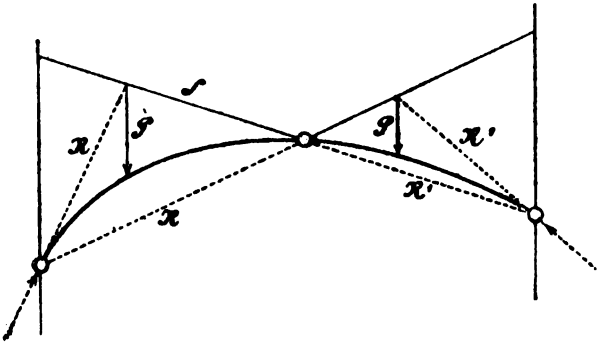
Fig. 25.



man sie in der ersten oder in der zweiten Summe berücksichtigt, denn man hat dann $(l-g)a = g(l-a)$. Speciell für symmetrische Träger wird aus 75) mit $l=0$, $g=\frac{1}{2}$

$$H=\frac{1}{2f}\left[\sum_{0}^{g}Pa+\sum_{g}^{l}P(l-a)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76$$

Fig. 26.



Das Moment in einem beliebigen Querschnitt x folgt aus 30)

$$M_x=Vx-Hy-\sum_{}^{x}P(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77$$

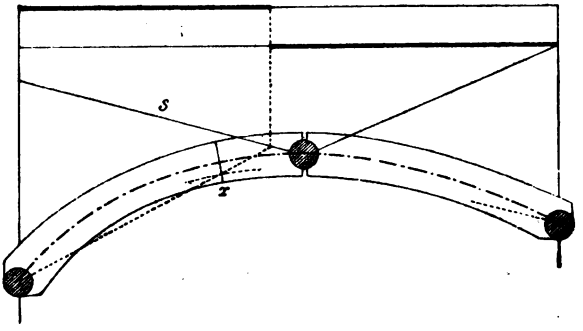
während die Beanspruchungen im Querschnitt V_x, N_x, T_x, R_x, N_1, N_2, S_0, T_0 u. s. w., sowie ψ, e durch die ungeänderten Formeln der §§ 1—4 bestimmt bleiben.

Die Umhüllungslinien U, U′ der Kämpferdrücke sind wie immer bei Vorhandensein von Kämpfergelenken Puncte, sie fallen mit den Mittelpuncten der Kämpfergelenke zusammen. Es gehen also die Kämpferdrücke R, R′ stets durch die Gelenkpuncte bei 0 und l. Da ausserdem bei $x = g$ $M_x = 0$ und für eine bei a angreifende Einzelkraft allein wenn $a < x$ $R_x = R'$, wenn $a > x$ $R_x = R$, so muss wenn $a < x$ R′ durch die Gelenke g und l, wenn $a > x$ R durch die Gelenke g und 0 gehen, es findet sich die Schnittlinie S, welche aus zwei im mittleren Gelenk zusammenstossenden geraden Strecken besteht, auf die aus Fig. 26 ersichtliche einfache Weise. Uebrigens erhält man nach der allgemeinen Gleichung 42) wegen $M = 0$ und mit Rücksicht auf 71) 73) die Gleichung von S (a Abscisse, b Ordinate):

$$\left.\begin{array}{ll} \text{von 0 bis g} & b = \frac{f}{g} a \\ \text{von g bis } l & b = \frac{fl - gc}{l - g} - \frac{f - c}{l - g} a \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (78$$

worin für symmetrische Träger $c = 0$, $g = \frac{l}{2}$

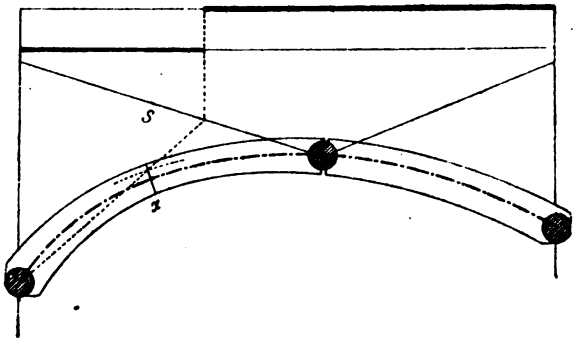
Fig. 27.



Nachdem die Schnittlinie S verzeichnet ist, kann die Er-

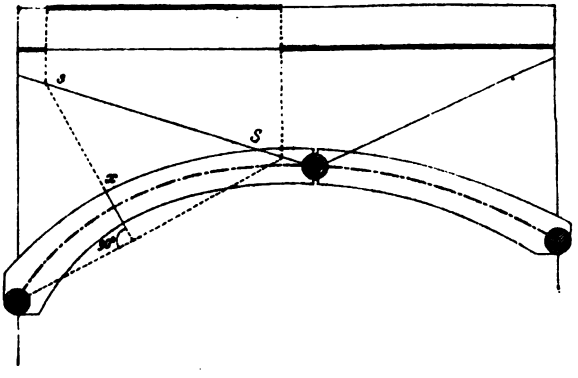
mittelung der ungünstigsten Belastungen wie in § 6 angegeben erfolgen. In Fig. 27 und 28 sind z. B. die ungünstigsten Belastungen für die Normalspannungen N_1, N_2 der obersten

Fig. 28.



und untersten Faser im Querschnitt x ermittelt, Fig. 29 zeigt diese Belastungen für die Transversalkraft T_x. Je nachdem hier der Querschnitt x mehr nach links oder rechts läge, würde

Fig. 29.



die äussere Belastungsstrecke links oder rechts wegfallen können.

Alle bis jetzt erhaltenen Resultate ergaben sich rein statisch, sie sind unabhängig von den Voraussetzungen der Elasticitätstheorie und, wie obige Formeln zeigen, haben auch

Temperaturänderungen und kleine Ausweichungen der Widerlager keinen Einfluss auf die Beanspruchungen.

Die Aenderung des Winkels ψ, welchen die Trägeraxe bei x mit dem Horizont bildet, folgt aus 11)

$$\triangle\varphi = \triangle\varphi_0 + \int_0^x X\,ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (79$$

unter φ_0 den Winkel bei $x=0$ verstanden. Die Aenderungen der Coordinaten x, y ergeben sich mit Rücksicht darauf, dass für $x=0$ $\triangle x=0$ $\triangle y=0$ sind, aus 9) 10)

$$\triangle x = -\int_0^x \triangle\varphi\,dy + \int_0^x Y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (80$$

$$\triangle y = \int_0^x \triangle\varphi\,dx + \int_0^x Y\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81$$

und $\triangle\varphi_0$ ist bestimmt durch

$$\triangle c = 0 = \int_0^l \triangle\varphi\,dx + \int_0^l Y\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82$$

Nur wenn durch Nachgeben der Widerlager eine Aenderung ihrer relativen Höhenlage entstände, würde der betreffende Werth von $\triangle c$ an Stelle von 0 einzusetzen sein. Die Grössen X, Y gibt § 1. Im III. Abschnitt sind die Integrationen für die practisch wichtigen Fälle ausgeführt.

§ 10. Bogen mit zwei Gelenken.

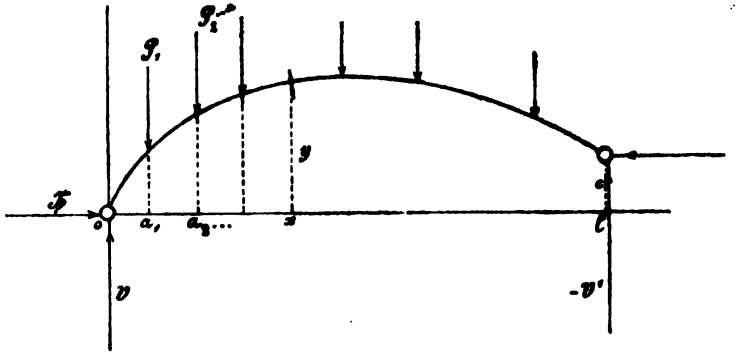
Hat der Bogen nur Kämpfergelenke, so sind $M = M' = 0$ und ergibt sich der Horizontalschub H bei Voraussetzung unveränderlicher Spannweite aus

$$\triangle l = 0 = -\int_0^l \triangle\varphi\,dy + \int_0^l Y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83$$

Diese Gleichung zeigt, dass jedes Ausweichen der Widerlager einen Einfluss auf H und damit auf alle Beanspruchungen

hat. Der Einfluss lässt sich berechnen, wenn man in 83) $\triangle l$ nicht gleich Null setzt, sondern unbestimmt einführt. In

Fig. 30.



solcher Allgemeinheit ist H für die practisch wichtigen Fälle im III. Abschnitt bestimmt. Da Y die Temperaturänderung τ enthält, so sind H und alle Beanspruchungen auch von dieser abhängig.

Nachdem H ermittelt ist, finden sich die Verticalreactionen der Kämpfer

$$V = \frac{1}{l}\left[\sum^{l} P(l-a) + Hc\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84$$

$$-V' = \frac{1}{l}\left[\sum^{l} Pa \qquad - Hc\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85$$

und speciell bei gleichen Stützhöhen wegen $c = 0$

$$V = \frac{1}{l}\sum^{l} P(l-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86$$

$$-V' = \frac{1}{l}\sum^{l} Pa \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87$$

Das Moment in einem beliebigen Querschnitt x folgt aus 30)

$$M_x = Vx - Hy - \sum^{x} P(x-a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88$$

während Verticalkraft V_x, Normalkraft N_x, Transversalkraft T_x, Resultante R_x, Normalspannungen N_1, N_2, specifische Transversalkraft und Längsschubkraft T_0, S_0 wie überhaupt alle

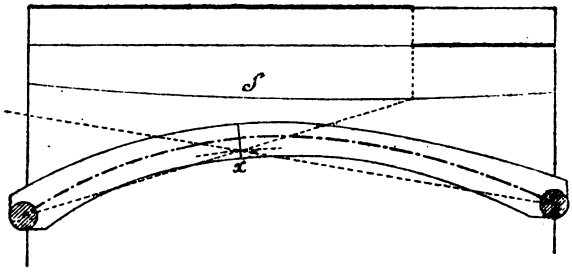
hier nicht erwähnten Grössen durch die Formeln der §§ 1—4 bestimmt bleiben.

Die Gleichung der Schnittlinie S der Kämpferdrücke wird nach 42)

$$b = \frac{V}{H} a \qquad (89$$

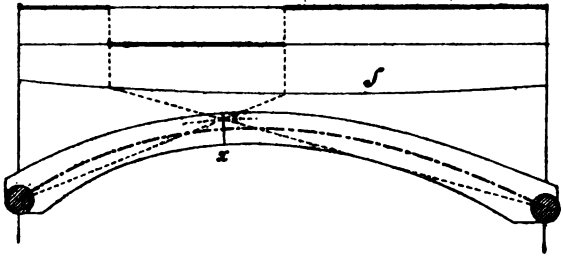
worin V, H Verticalreaction bei 0 und Horizontalschub für eine bei a angreifend gedachte Einzellast (nicht die oben er-

Fig. 31.



wähnten Werthe für Gesammtbelastung) bedeuten. Je nach der Form des Trägers ändert sich der Ausdruck für dieses H und damit auch die Specialform vorstehender Gleichung (Siehe III. Abschn.). Die Umhüllungslinien der Kämpferdrücke sind,

Fig. 32.

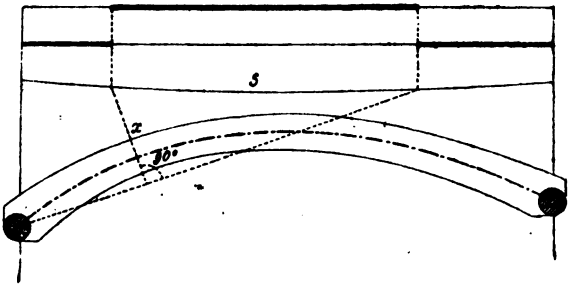


wie immer bei Trägern mit Kämpfergelenken, Puncte, sie fallen mit den Gelenkpuncten zusammen.

Nachdem die Schnittlinie S verzeichnet ist, kann die Er-

mittelung der ungünstigsten Belastungen wie im § 6 angegeben, erfolgen. In Fig. 31 ist die ungünstigste Belastung bezüglich der Normalspannung N_1 in der obersten Faser und in Fig. 32 bezüglich der Normalspannung N_2 in der untersten Faser, in Fig. 33 in Bezug auf die Transversalkraft T_x bei x angegeben.

Fig. 33.



Für die Aenderung des Winkels φ, welchen die Bogenaxe bei x mit der Horizontalen bildet, hat man wenn für $x=0 \quad \varphi=\varphi_0$ bezeichnet wird

$$\triangle\varphi=\triangle\varphi_0+\int_0^x X\,ds \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (90$$

Die Aenderungen der Coordinaten x, y folgen aus 9) 10), weil für $x=0 \quad \triangle x=0, \quad \triangle y=0$:

$$\triangle x=-\int_0^x \triangle\varphi\,dy+\int_0^x Y\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (91$$

$$\triangle y=\int_0^x \triangle\varphi\,dx+\int_0^x Y\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (92$$

Der Werth $\triangle\varphi_0$ ist durch

$$\triangle c=0=\int_0^l \triangle\varphi\,dx+\int_0^l Y\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (93$$

bestimmt, worin jedoch, wenn eine Aenderung der relativen Höhenlage der Stützpuncte zu berücksichtigen wäre, der be-

treffende Werth von $\triangle c$ an Stelle von 0 zu treten hätte. Die Grössen X, Y gibt § 1. Im III. Abschnitt sind vorstehende Integrale für die practisch wichtigen Fälle abgeleitet.

§ 11. Bogen ohne Gelenk.

Es sind hier M, M', H aus den im § 1 gegebenen Elasticitätsgleichungen zu bestimmen. Werden die Widerlager und Stützpuncte vollständig unverschiebbar angenommen, so lauten die 3 Bedingungsgleichungen

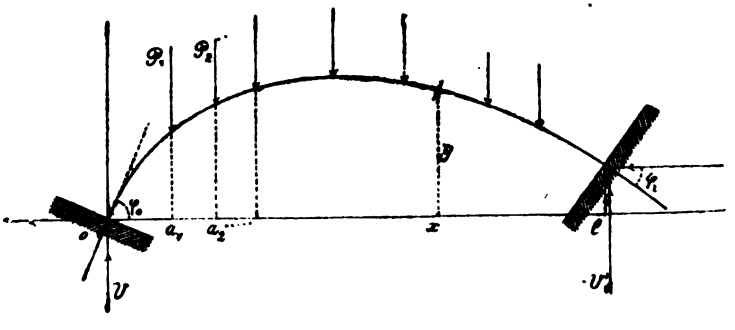
$$\triangle \varphi_l = 0 = \int_0^l X\,ds \quad \ldots\ldots \quad (94$$

$$\triangle l = 0 = -\int_0^l \triangle\varphi\,dy + \int_0^l Y\,dx \quad \ldots\ldots \quad (95$$

$$\triangle c = 0 = \int_0^l \triangle\varphi\,dx + \int_0^l Y\,dy \quad \ldots \quad (96$$

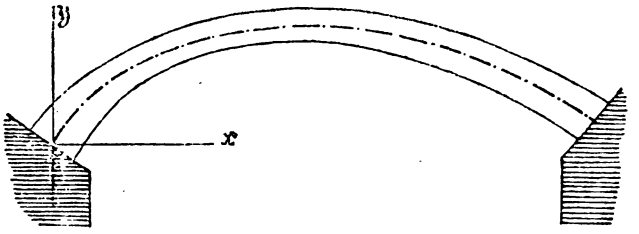
Soll ein Ausweichen der Widerlager berücksichtigt werden, so sind $\triangle \varphi_l$, $\triangle l$, $\triangle c$ nicht Null zu setzen, sondern unbestimmt einzuführen. In Y kommt τ vor und haben also sowohl Ausweichen der Widerlager als Temperaturänderungen einen Einfluss auf die Beanspruchungen. Für die practisch wichtigen Fälle sind vorstehende Integrationen im III. Abschnitt ausgeführt.

Fig. 34.



Nachdem M, M′, H bekannt, gelten für die Verticalreactionen der Kämpfer V, — V′, für die Verhältnisse in einem beliebigen Querschnitt x, die Schnittlinie S und die Umhüllungslinien U, U′ die in §§ 1—5 gegebenen Formeln, in welchen nur bei gleichen Stützhöhen $c = 0$ zu setzen ist.

Fig. 35.



Die speciellen Gleichungen für S, U, U′ können erst nach Annahme bestimmter Trägerformen ermittelt werden (III. Abschnitt). Hat man diese Linien verzeichnet, so finden sich die ungünstigsten Belastungen wie in § 6 angegeben und erleiden auch die dort eingefügten Figuren keine Aenderung.

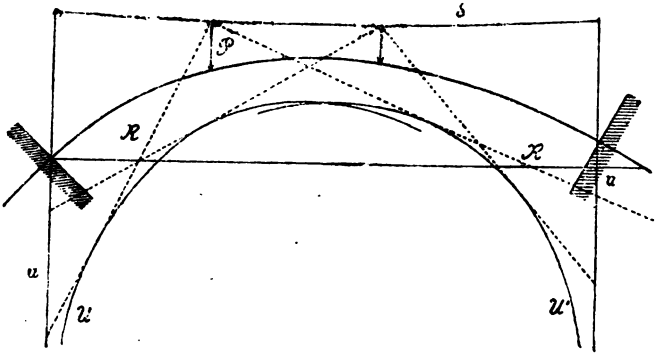
Bei manchen Formen von Trägern lassen sich die Gleichungen von U, U′ nicht in einfachen Ausdrücken geben. Alsdann kann die Umhüllungslinie wie folgt bestimmt werden. Man nimmt an geeigneter Stelle a eine Einzellast P an, berechnet für diese allein M, M′, H, erhält die Ordinaten der Reactionen R, R′ bei 0 und l (Fig. 36) nach § 4

$$w = \frac{M}{H} \qquad w' = c + \frac{M'}{H}$$

und kann nun die Richtungslinien von R, R′ nach dem Schnittpunct von P und S ziehen. Wiederholt man dies Verfahren für einige passend gelegene Puncte, so lassen sich die Umhüllungslinien U, U′, welche alle R bezw. alle R′ berühren müssen, verzeichnen. Bei symmetrischen Trägern kann man natürlich jede gefundene R-Linie symmetrisch zur Verticalen

durch die Mitte umklappen, wodurch sich eine neue R'-Linie ergibt und umgekehrt. — Wäre auch die Gleichung der

Fig. 36.



Schnittlinie S unbekannt, so würden die Ordinaten b von S für die angenommene a nach 42) zu berechnen und so S zu ermitteln sein.

Die Aenderungen von φ, x, y ergeben sich nach 9)—11) weil nun für $x = 0$, $\triangle\varphi = 0$, $\triangle x = 0$, $\triangle y = 0$

$$\triangle\varphi = \int_0^x X\,ds \quad \ldots\ldots \quad (97$$

$$\triangle x = -\int_0^x \triangle\varphi\,dy + \int_0^x Y\,dx \quad \ldots\ldots \quad (98$$

$$\triangle y = \int_0^x \triangle\varphi\,dx + \int_0^x Y\,dy \quad \ldots\ldots \quad (99$$

Im III. Abschnitt sind diese Integrale für die practisch wichtigen Fälle ausgeführt.

III. Besondere Formen von Bogenträgern.

Um die allein noch fehlenden Grössen: für Bogen mit 2 Gelenken den Horizontalschub H, für Bogen mit 3 Gelenken

Horizontalschub und Stützenmomente H, M, M' und für alle Arten von Bogenträgern die elastigen Formänderungen — zu erhalten, müssen zunächst die Integrationen der Ausdrücke $\triangle\varphi$, $\triangle x$, $\triangle y$ ausgeführt werden, und soll dies nun für die practisch wichtigen Fälle geschehen.

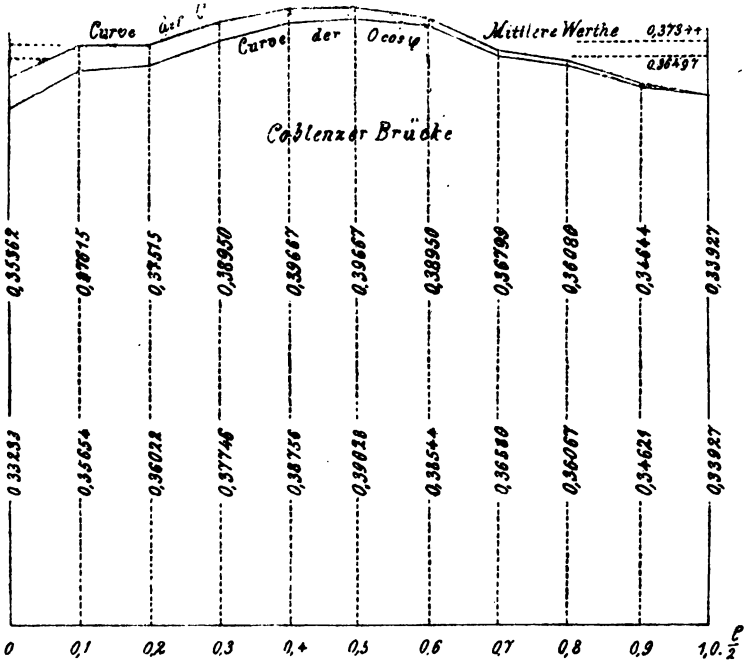
Bei diesen Ableitungen sind vereinfachende Annahmen in Bezug auf die Veränderlichkeit des Querschnitts zulässig. Man könnte z. B. wie bei Berechnung der Formänderung und Stützenmomente gerader Träger das Trägheitsmoment Θ constant setzen.*) Es könnte aber auch unter Umständen eine andere Annahme zweckmässig sein. So setzt Culmann bei parabolischen Trägern $\Theta\cos\varphi$ constant und wenn wir zwar die Begründung (Θ soll nach den Widerlagern hin immer zunehmen und sogar weit mehr als $\cos\varphi$ abnimmt) nicht überall bestätigt finden, so ist doch z. B. für die Coblenzer Brücke die Annahme „$\Theta\cos\varphi$ constant" noch genauer als die Annahme „Θ constant". (Fig. 37.) Unter dem constanten $\Theta\cos\varphi$ hat man sich aber nicht den Werth von Θ im Scheitel, wo $\cos\varphi = 1$ ist, sondern einen mittleren Werth von $\Theta\cos\varphi$ vorzustellen. Uebrigens verdient bemerkt zu werden, dass durch die Annahme „$\Theta\cos\varphi$ constant" eigentlich nichts Neues in die Bogentheorie gekommen ist, indem sich damit dieselben Resultate ergeben müssen, wie mit der bei Parabelträgern allgemein üblichen, wenn auch viel weniger befriedigenden „Θ constant, $ds = dx$, $s = x$". Wir werden

---

*) Bei dem in meiner „Theorie der continuirlichen und einfachen Träger" berechneten Träger mit den Oeffnungen 52, 65, 65, 52 m und einer Veränderlichkeit des Trägheitsmoments von 1 bis 2,17 ergab die Annahme eines constanten Θ bei den Schubkräften kaum merkliche Abweichungen, bei den Momenten nur an einer Stelle solche bis 6%, sonst überall unter 3%. Für die Coblenzer Brücke aber variirt Θ nur zwischen 1 und 1,12.

Θ oder $\Theta \cos \varphi$ constant setzen, wie es gerade für die betreffende Trägerform am bequemsten ist.

Fig. 37.



Die abzuleitenden Gleichungen gelten bei beliebiger Belastung und beliebigen Temperaturen. Für Träger mit sprungweise veränderlichem Querschnitt lassen sich die Formeln in ganz ähnlicher Weise ermitteln, wie von mir a. a. O. für continuirliche Träger gezeigt wurde. Da aber die Sache practisch ohne Bedeutung ist, so will ich an dieser Stelle nicht näher darauf eingehen.

§ 12. Parabelbogenträger.

a) Allgemeines.

Wir nehmen constant an

$$A = E \Theta \cos \varphi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (100$$

Der Einfluss der Axialkraft N_x auf H, M, M' und die Form-

änderungen wird gewöhnlich vernachlässigt. Wir wollen ihn berücksichtigen und dabei setzen

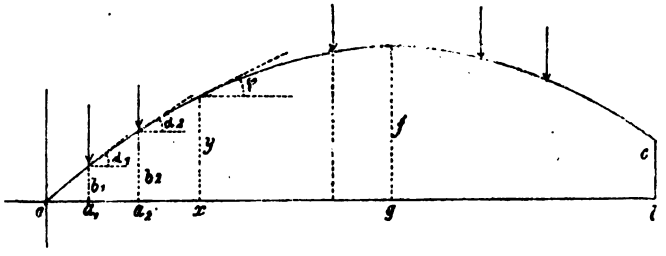
$$m = \frac{\Theta}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (101$$

unter m ebenfalls einen constanten Mittelwerth verstanden. Wenn in üblicher Weise und wie bei Berechnung der Coblenzer Brücke $\Theta = F\left(\frac{\mathfrak{h}_0}{2}\right)^2$ gesetzt wird, worin $\mathfrak{h}_0$ die im Voraus angenommene constante Entfernung der Gurtungsschwerpuncte bedeutet, dann ist m wirklich eine Constante, nämlich

$$m = \left(\frac{\mathfrak{h}_0}{2}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (101a$$

Sind bei verticaler Parabelaxe g, f die Coordinaten des

Fig. 38.



Scheitels, h der Parameter, so hat man aus der Scheitelgleichung der Parabel

$$(g-x)^2 = 2k(f-y)$$

$$g^2 = 2kf \quad \ldots\ldots\ldots \quad (102$$

$$y = \frac{f}{g^2}(2g-x)x = \frac{2g-x}{2k}x \quad \ldots \quad (103$$

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{2f}{g^2}(g-x) = \frac{g-x}{k} \quad \ldots \quad (104$$

Die allgemeinsten Gleichungen für $\triangle\varphi$, $\triangle x$, $\triangle y$ lauten

$$\triangle\varphi = \triangle\varphi_0 + \int_0^x X\,ds$$

$$\triangle x = -\int_0^x \triangle \varphi \, dy + \int_0^x Y \, dx$$

$$\triangle y = \int_0^x \triangle \varphi \, dx + \int_0^x Y \, dy$$

worin stets genügend genau

$$X = \frac{M_x}{E\Theta}$$

$$Y = \varepsilon\tau - \frac{N_x}{EF}$$

Da nun

$$\int_0^x X \, ds = \int \frac{M_x \, dx}{E\Theta \frac{dx}{ds}} = \frac{1}{A}\int_0^x M_x \, dx$$

so folgt mit Rücksicht auf 30) und den Werth von y durch directe Integration

$$\triangle \varphi = \triangle \varphi_0 + \frac{1}{2A}\left[2Mx + Vx^2 - Hx^2\frac{3g-x}{3k} - \sum^x P(x-a)^2\right] \quad (105$$

Substituirt man diesen Werth und Y in die Ausdrücke für $\triangle x$, $\triangle y$ und integrirt nochmals, so folgen

$$\triangle x = \varepsilon\tau x - \int_0^x \frac{N_x}{EF}\,dx - y\triangle\varphi_0 - \frac{x^2}{6kA}\left[M(3g-2x) + Vx\right.$$

$$\left.(g - \frac{3x}{4}) - H\frac{x}{k}(g^2 - gx + \frac{x^2}{5}) - \frac{1}{4x^2}\sum^x P(4g-3x-a)(x-a)^3\right]$$

$$\triangle y = \varepsilon\tau y - \int_0^x \frac{N_x}{EF}\,dy + x\triangle\varphi_0 + \frac{x^2}{6A}\left[3M + Vx - H\frac{x}{k}\right.$$

$$\left.(g - \frac{x}{4}) - \frac{1}{x^2}\sum^x P(x-a)^3\right]$$

Wollten wir den Einfluss der Axialkraft vernachlässigen, so würden die in diesen Gleichungen noch vorkommenden Integrale gleich Null zu setzen und die Berechnung der Formänderungen beendet sein.

Nach 31) und 100) hat man

$$N_x = V_x \frac{dy}{ds} + H \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{\Theta}{A} \frac{dx}{ds} \qquad \text{und damit}$$

$$\int_0^x \frac{N_x}{EF} dx = \int_0^x \frac{\Theta}{AF} \frac{dx^2}{ds^2} V_x dy + \int_0^x \frac{\Theta}{AF} \frac{dx^2}{ds^2} H dx$$

$$\int_0^x \frac{N_x}{EF} dy = \int_0^x \frac{\Theta}{AF} \frac{dy^2}{ds^2} V_x dx + \int_0^x \frac{\Theta}{AF} \frac{dx^2}{ds^2} H dy$$

oder auch bei gleichzeitiger Beachtung von 29)

$$\int_0^x \frac{N_x}{EF} dx = \frac{m}{A}\left[V \int_0^x \cos^2\varphi \, dy - \int_0^x \cos^2\varphi \Sigma P \, dy + H \int_0^x \cos^2\varphi \, dx \right]$$

$$\int_0^x \frac{N_x}{EF} dy = \frac{m}{A}\left[V \int_0^x \sin^2\varphi \, dx - \int_0^x \sin^2\varphi \Sigma P \, dx + H \int_0^x \cos^2\varphi \, dy \right]$$

Setzen wir zur Abkürzung

$$z = \operatorname{tg}\varphi = \frac{g-x}{k} = \sqrt{2\frac{f-y}{k}} \qquad \text{also}$$

$$dx = -k\,dz, \qquad dy = -kz\,dz \qquad \text{so wird}$$

$$\int_0^x \cos^2\varphi \, dy = -k \int_0^x \frac{z\,dz}{1+z^2} = -\frac{k}{2} \operatorname{logn} \frac{1+z^2}{1+z_0^2}$$

$$= -\frac{k}{2} \operatorname{logn}\left(1 - \frac{2y}{k+2f}\right)$$

und da hierin der Quotient immer sehr klein, z. B. für $\frac{f}{g} = \frac{1}{5}$, wegen 102) und $y < f$, $\frac{2y}{k+2f} < \frac{4}{29}$, im Mittel etwa $\frac{2}{29}$, so können wir, die höheren Potenzen vernachlässigend, setzen

$$\operatorname{logn}\left(1 - \frac{2y}{k+2f}\right) = -\frac{2y}{k+2f} \qquad \text{womit}$$

$$\int_0^x \cos^2\varphi \, dy = \frac{ky}{k+2f}$$

Weiter folgen durch Integration

$$\int_0^x \cos^2\varphi\, dx = -k\int_0^{\varphi} \frac{dz}{1+z^2} = k(\varphi_0-\varphi)$$

$$\int_0^x \sin^2\varphi\, dx = \int_0^x (1-\cos^2\varphi)\, dx = x - k(\varphi_0-\varphi)$$

und bei Beachtung dieser Werthe in der aus Note 1 erkennbaren Weise

$$\int_0^x \cos^2\varphi \sum^x P\, dy = \frac{k}{k+2f}\sum^x P(y-b)$$

$$\int_0^x \sin^2\varphi \sum^x P\, dx = \sum^x P\,(x-a) - k\sum^x P(\alpha-\varphi)$$

worin b, α Ordinate und Neigungswinkel bei a bedeuten (Fig. 38). Damit sind die Integralwerthe in den letzten Ausdrücken für $\triangle x$, $\triangle y$ bestimmt und ergeben sich durch Substitution

$$\triangle x = \varepsilon\tau x - y\triangle\varphi_0 - \frac{x^2}{6kA}\Big[M(3g-2x) + Vx\left(g-\frac{3x}{4}\right) - H\frac{x}{k}\left(g^2-gx+\frac{x^2}{5}\right) - \frac{1}{4x^2}\sum^x P(4g-3x-a)\,(x-a)^3\Big] - \frac{km}{(k+2f)A}\Big[Vy + H(k+2f)(\varphi_0-\varphi) - \sum^x P(y-b)\Big] \quad (106$$

$$\triangle y = \varepsilon\tau y + x\triangle\varphi_0 + \frac{x^2}{6kA}\Big[3M + Vx - H\frac{x}{k}\left(g-\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{x^2}\sum^x P(x-a)^3\Big] - \frac{km}{A}\Big[V\left(\frac{x}{k}-\varphi_0+\varphi\right) + H\frac{y}{k+2f} - \sum^x P\left(\frac{x-a}{k}-\alpha+\varphi\right)\Big] \quad (107$$

Die Gleichungen 105) – 107) geben die allgemeinsten Ausdrücke für die elastigen Formänderungen symmetrischer wie unsymmetrischer Parabelbogenträger mit constantem $\Theta\cos\varphi$. Sie gelten für beliebige Belastung und beliebige Temperaturen bei Trägern mit festen Enden, frei schwebendem Ende oder mit Gelenken. Die mit dem Factor m behafteten Klammerausdrücke stellen den Einfluss der Axialkraft dar.

Schreiben wir die 3 Gleichungen 105) — 107) für $x = l$ an, so bestimmen sich daraus für Träger ohne Gelenk die 3 Unbekannten H, M, M', für Träger mit 2 Gelenken H, $\triangle \varphi_0$, $\triangle \varphi_1$, für Träger mit 3 Gelenken ebenfalls H, $\triangle \varphi_0$, $\triangle \varphi_1$, wobei aber H schon bekannt ist, so dass man eine der 3 Gleichungen entbehren hann. Da keine Schwierigkeit mehr vorhanden ist und um nicht unnöthig complicirte Formeln zu erhalten, wollen wir im Folgenden nur symmetrische Träger ins Auge fassen. Bis jetzt sind die Formeln durch ihre Allgemeinheit nicht umständlicher geworden.

Bei symmetrischen Trägern ist für $x = l$, $y = c = 0$, $\varphi = \varphi_1 = -\varphi_0$, ferner hat man dann $g = \frac{1}{2}$ und werden unter gleichzeitiger Berücksichtigung von 37) die 3 Bedingungsgleichungen

$$\triangle \varphi^l = \triangle \varphi_0 + \frac{l}{2A}\left[M + M' - \frac{4}{3}Hf + \frac{1}{l}\overset{l}{\Sigma} P a (l - a)\right] \quad (108$$

$$\triangle l = \varepsilon \tau l + \frac{lf}{3A}\left[M + M' - \frac{8}{5}Hf + \frac{1}{l^3}\overset{l}{\Sigma} P a (l-a)(l^2 + la - a^2)\right] - \frac{m}{A}\left[2Hk\varphi_0 + \frac{1}{2(k+2f)}\overset{l}{\Sigma} P a (l-a)\right] \quad (109$$

$$\triangle c = l \triangle \varphi_0 + \frac{l^2}{3A}\left[M + \frac{1}{2}M' - Hf + \frac{1}{2l^2}\overset{l}{\Sigma} P a (l-a)(2l-a)\right] - \frac{m}{A}\left[(M' - M)(1 - 2\varphi_0 \frac{k}{l}) + k\overset{l}{\Sigma} P (2\frac{a}{l} + \alpha - \varphi_0)\right] \quad (110$$

b) Bogen mit einem festgespannten und einem freischwebenden Ende. (§ 7.)

Für diese sind M, V bekannt und geben die Gleichungen 105)—107) mit $H = 0$, $\triangle \varphi_0 = 0$ unmittelbar die Formänderungen.

c) Symmetrische Bogen mit 3 Gelenken. (§ 9.)

Es sind $M = 0$, $M' = 0$, H bekannt. Die Formänderungen

ergeben sich aus 105)—107) mit $M = 0$, sobald $\triangle \varphi_0$ bekannt ist. Dieser Werth findet sich aber aus 110)

$$\triangle \varphi_0 = \frac{\triangle c}{l} + \frac{1}{3A}\left[Hlf - \frac{1}{2l^2}\sum^{l} Pa(l-a)(2l-a)\right] + \frac{mk}{Al}\sum^{l} P\left(2\frac{a}{l} + \alpha - \varphi_0\right) \quad (111$$

worin, wenn, wie gewöhnlich, die Widerlager vollständig fest angenommen werden, $\triangle c = 0$ zu setzen ist. Der Ausdruck mit dem Factor m stellt den Einfluss der Axialkraft dar.

d) Symmetrische Bogen mit 2 Gelenken. (§ 10.)

Hier haben wir $M = 0$, $M' = 0$ und folgt aus 109) der Horizontalschub

$$H = \frac{\sum^{l} Pa(l-a)(l^2 + la - a^2 - \frac{12mk}{2f+k}) + 24Ak(\varepsilon\tau l - \triangle l)}{16k(0{,}8lf^2 + 3mk\varphi_0)} \quad (112$$

Sind Temperatureinflüsse und Ausweichen der Widerlager nicht zu berücksichtigen, so hat man mit $\tau = 0$, $\triangle l = 0$

$$H = \frac{\sum^{l} Pa(l-a)(l^2 + la - a^2 - \frac{12mk}{2f+k})}{16k(0{,}8lf^2 + 3mk\varphi_0)} \quad (113$$

Der Einfluss einer Temperaturänderung von τ^0 ist allein

$$H = \frac{15Al\varepsilon\tau}{8lf^2 + 30mk\varphi_0} = \frac{60Af\varepsilon\tau}{32f^3 + 15ml\varphi_0} \quad (114$$

und der Einfluss eines Ausweichens der Widerlager — bei Zurückweichen $\triangle l$ positiv, bei Vorrücken $\triangle l$ negativ —

$$H = -\frac{15A\triangle l}{8lf^2 + 30mk\varphi_0} = -\frac{60A\triangle l}{32f^3 + 15ml\varphi_0}\frac{f}{l} \quad (115$$

Wird wie gewöhnlich der Einfluss der Axialkraft vernachlässigt, so fallen alle Glieder mit dem Factor m fort und ist im allgemeinsten Fall

$$H = \frac{5}{8fl^3}\sum^{l} Pa(l^3 - 2la^2 + a^3) + \frac{15A}{8lf^2}(\varepsilon\tau l - \triangle l) \quad (116$$

wenn Temperaturdifferenzen und Ausweichen der Widerlager nicht in Betracht kommen

$$H = \frac{5}{8 f l^3} \sum^{l} P a (l^3 - 2 l a^2 + a^3) \qquad (117$$

der Einfluss einer Temperaturänderung von τ^0 allein

$$H = \frac{15 A \varepsilon \tau}{8 f^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118$$

und der Einfluss eines Ausweichens der Widerlager allein

$$H = -\frac{15 A \triangle l}{8 l f^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119$$

Für eine an beliebiger Stelle a angreifende Einzellast P finden sich aus 86) 116)

$$V = \frac{1}{l} P (l - a)$$

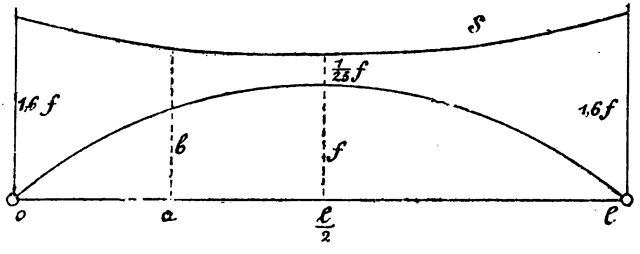
$$H = \frac{5}{8 f l^3} P a (l - a) (l^2 + l a - a^2)$$

und durch Substitution dieser Werthe in 89) folgt die Gleichung der Schnittlinie S der Kämpferdrücke

$$b = \frac{8}{5} \frac{f l^2}{l^2 + l a - a^2} \qquad (120$$

Da die Linie S (Fig. 39) nur zu verzeichnen ist, um die ungünstigsten Belastungen festzustellen, wobei es auf kleine

Fig. 39.



Differenzen nicht ankommt, so kann man natürlich, in der Gleichung von S den Einfluss der Axialkraft vernachlässigen, auch wenn derselbe sonst berücksichtigt wird.

Die Formänderungen sind wie bei Trägern mit 3 Gelenken durch 105)—107) bestimmt, nachdem $\triangle \varphi_0$ aus 111) berechnet ist.

e) Symmetrische Bogen ohne Gelenk. (§ 11.)

Soll der Einfluss der Axialkraft berücksichtigt werden, so verwendet man zur Bestimmung von M, M', H am besten die Gleichungen 108) — 110) unmittelbar, darin $\triangle \varphi_0 = 0$, $\triangle \varphi_1 = 0$, $\triangle c = 0$, $\triangle l = 0$ setzend, wenn kein Ausweichen der Widerlager in Betracht kommt. Da man jedoch auf absolut festgespannte Enden in der Praxis nicht zu rechnen hat, die Genauigkeit der Rechnung also schon hiedurch beeinträchtigt wird, so wird man von dem immerhin geringen Einfluss der Axialkraft gewöhnlich absehen. Alsdann fallen in 108) — 110) die Glieder mit dem Factor m weg und ergibt die Auflösung

$$H = \frac{15}{4 f l^3} \overset{l}{\Sigma} P a^2 (l-a)^2 + \frac{45 A \varepsilon \tau}{4 f^2} - \frac{15 A}{2 l f} \left(\frac{3 \triangle l}{2 f} + \triangle \varphi_0 - \varphi_1 \right) \quad (121$$

$$M = \frac{1}{2 l^3} \overset{l}{\Sigma} P a (l-a)^2 (5a - 2l) + \frac{15 A \varepsilon \tau}{2 f} - \frac{3 A}{l} \left(\frac{5 \triangle l}{2 f} + \frac{2 \triangle c}{l} + \triangle \varphi_0 - 3 \triangle \varphi_1 \right) \quad (122$$

$$M' = \frac{1}{2 l^3} \overset{l}{\Sigma} P a^2 (l-a)(3l-5a) + \frac{15 A \varepsilon \tau}{2 f} - \frac{3 A}{l} \left(\frac{5 \triangle l}{2 f} - \frac{2 \triangle c}{l} - \triangle \varphi_1 + 3 \triangle \varphi_0 \right) \quad (123$$

Hat man Temperatureinflüsse und Ausweichen der Trägerenden nicht zu berücksichtigen, so werden

$$H = \frac{15}{4 f l^3} \overset{l}{\Sigma} P a^2 (l-a)^2 \quad (124$$

$$M = \frac{1}{2 l^3} \overset{l}{\Sigma} P a (l-a)^2 (5a - 2l) \quad (125$$

$$M' = \frac{1}{2 l^3} \overset{l}{\Sigma} P a^2 (l-a)(3l-5a) \quad (126$$

Eine Temperaturänderung um τ^0 allein bewirkt

$$H = \frac{45 A \varepsilon \tau}{4 f^2} \quad (127$$

$$M = M' = \frac{15 A \varepsilon \tau}{2 f} = \frac{2}{3} H f \quad (128$$

Der von der Temperatur herrührende Horizontalschub ist also

hier 6 mal so gross wie bei 2 Gelenken und greift in $^2/_3$ f über den Stützpuncten anstatt in diesen an. Ein Ausweichen der Trägerenden für sich bewirkt

$$H = -\frac{15\,A}{2\,l\,f}\left(\frac{3\triangle l}{2\,f} + \triangle\varphi_0 - \triangle\varphi_1\right) \quad . \quad . \quad (129$$

$$M = -\frac{3\,A}{l}\left(\frac{5\triangle l}{2\,f} + \frac{2\triangle c}{l} + \triangle\varphi_0 - 3\triangle\varphi_1\right) . \quad (130$$

$$M' = -\frac{3A}{l}\left(\frac{5\triangle l}{2\,f} - \frac{2\triangle c}{l} - \triangle\varphi_1 + 3\triangle\varphi_0\right) . \quad (131$$

und wenn nur eine Aenderung der Spannweite um $\triangle$ l, keine Neigung und Senkung der Widerlager, eingetreten ist

$$H = -\frac{45\,A\triangle l}{4\,l\,f^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (132$$

$$M = M' = -\frac{15\,A\triangle l}{2\,l\,f} = \frac{2}{3}\,Hf \quad . \quad . \quad . \quad (133$$

in Bezug auf dies H gilt wieder das hinsichtlich 127) Gesagte.

Einer an beliebiger Stelle a angreifenden Einzellast entsprechen nach 124) — 126)

$$H = \frac{15}{4\,f\,l^3}\,P\,a^2\,(l-a)^2$$

$$M = \frac{1}{2\,l^3}\,P\,a\,(l-a)^2\,(5\,a - 2\,l)$$

$$M' = \frac{1}{2\,l^3}\,P\,a^2\,(l-a)\,(3\,l - 5\,a)$$

und mit Rücksicht auf diese Werthe und $c = 0$ nach 37)

$$V = \frac{1}{l^3}\,P\,(l-a)^2\,(l+2\,a)$$

Substituirt man diese Ausdrücke in 42), so folgt die Gleichung der Schnittlinie S der Kämpferdrücke

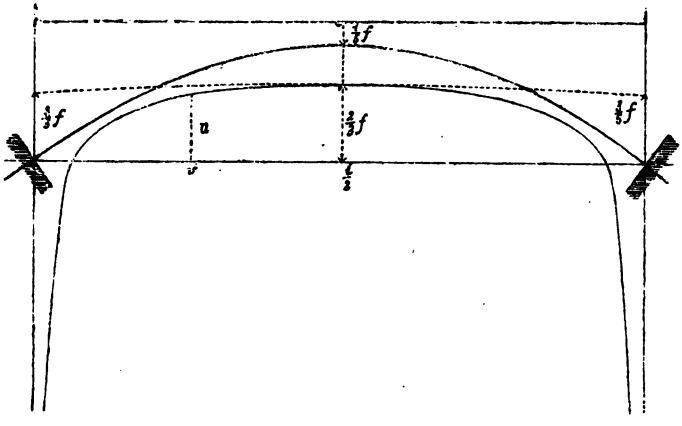
$$b = \frac{6}{5}\,f \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (134$$

Die Linie S ist also eine horizontale Gerade (Fig. 40). Bildet man die Differenziale der Ausdrücke M, H, V nach a und setzt dieselben in 45) 46) ein, so ergeben sich

$$v = \frac{a}{a+l}\frac{l}{2}$$

$$u = \frac{6a\,l^2 - 5a^3 - l^3}{l^2 - a^2}\,\frac{2f}{15a}$$

Fig. 40.



und substituirt man schliesslich den aus der ersten dieser Gleichungen folgenden Werth von a in die zweite, so resultirt die Gleichung der Umhüllungslinie U (der Kämpferdrücke R)

$$u = \frac{f}{15\,l\,v}(14\,l\,v - 4v^2 - l^2) \quad . \quad . \quad . \quad (135$$

Die Curve ist eine Hyperbel und da

$$\frac{du}{dv} = \frac{f}{15}\left(\frac{l}{v^2} - \frac{4}{l}\right)$$

so hat man z. B. für $v = 0$ $u = -\infty$ $\frac{du}{dv} = \infty$

„ $v = \frac{l}{2}$ $u = \frac{2}{3}f$ $\frac{du}{dv} = 0$

„ $v = l$ $u = \frac{3}{5}f$ $\frac{du}{dv} = -\frac{f}{5l}$

Indessen wird die Curve höchstens bis $v = \frac{l}{4}$ gebraucht,

weil, wie aus $v = \frac{a}{a+l}\frac{l}{2}$ folgt, der Berührungspunct des Kämpferdrucks R für $a = l$ bei $v = \frac{l}{4}$ liegt.

Die Umhüllungslinie U' (der Kämpferdrücke R') liegt in Bezug auf die Verticale durch den Scheitel des Bogens genau symmetrisch zur Umhüllungslinie U, mit horizontaler Tangente in dieselbe übergehend (Fig. 40).

Die Formänderungen sind durch die Gleichungen 105)—107) bestimmt, worin, wenn kein Ausweichen der Widerlager in Betracht kommt, $\Delta\varphi_0 = 0$ zu setzen ist.

§. 13. Kreisbogenträger.

a) Allgemeines.

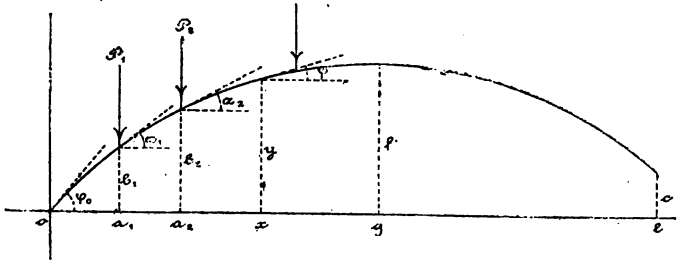
Wir nehmen den Querschnitt constant an und setzen

$$A = \frac{2E\Theta}{r} \qquad (136$$

$$m = \frac{\Theta}{Fr^2} \qquad (137$$

Bezeichnen r den Radius, g, f die Coordinaten des Scheitels, $k = r - f$, so bestehen folgende Bezeichnungen (Fig. 41)

Fig. 41.



$$x = g - r\sin\varphi = r(\sin\varphi_0 - \sin\varphi) \qquad (138$$

$$y = r\cos\varphi - k = r(\cos\varphi - \cos\varphi_0) \qquad (139$$

$$(g-x)^2+(k+y)^2=r^2 \qquad (140$$

$$g^2-2rf+f^2=0 \qquad (141$$

$$\sin\varphi=\frac{g-x}{r},\quad \cos\varphi=\frac{k+y}{r},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{g-x}{k+y} \qquad (142$$

Auch hier wird ausgegangen von den allgemeinen Gleichungen

$$\triangle\varphi=\triangle\varphi_0+\int_0^x X\,ds$$

$$\triangle x=-\int_0^x\triangle\varphi\,dy+\int_0^x Y\,dx$$

$$\triangle y=\int_0^x\triangle\varphi\,dx+\int_0^x Y\,dy$$

$$X=\frac{M_x}{E\Theta}$$

$$Y=\varepsilon\tau-\frac{N_x}{EF}$$

Wegen $ds=-r\,d\varphi$ wird

$$\triangle\varphi=\triangle\varphi_0-\frac{2}{A}\int_0^x M_x\,d\varphi$$

und nach Substitution von 30) und Ausführen der Integration unter Beachtung von 138) 139) und Note 1

$$\triangle\varphi=\triangle\varphi_0+\frac{2}{A}\Big[(M+Vg+Hk)(\varphi_0-\varphi)-Vy-Hx+\overset{x}{\Sigma}P(y-b)-\overset{x}{\Sigma}P(g-a)(\alpha-\varphi)\Big] \qquad (143$$

Substituirt man diesen Werth in die Ausdrücke für $\triangle x$, $\triangle y$ und führt die ersten Integrale wieder unter Beachtung von 138) 139) und Note 1 aus, so folgen

$$\triangle x = \varepsilon\tau x - \frac{1}{EF}\int_0^x N_x\,dx - y\triangle\varphi_0 - \frac{2}{A}\Big[(M + Vg + Hk)\,([\varphi_0 - \varphi][k+y] - x) - \frac{1}{2}V y^2 - \frac{1}{2}H\,(xy + kx - gy - r^2\,[\varphi_0 - \varphi]) - (y+k)\sum^x P\,(g-a)\,(\alpha-\varphi) + \sum^x P\,(g-a)\,(x-a) + \frac{1}{2}\sum^x P\,(y-b)^2\Big] \quad (144$$

$$\triangle y = \varepsilon\tau y - \frac{1}{EF}\int_0^x N_x\,dy + x\triangle\varphi_0 + \frac{2}{A}\Big[(M + Vg + Hk)(y - [\varphi_0 - \varphi]\,[g-x]) - \frac{1}{2}H x^2 - \frac{1}{2}V\,(xy - kx - gy + r^2\,[\varphi_0 - \varphi]) + (g-x)\sum^x P\,(g-a)\,(\alpha-\varphi) - \sum^x P\,(g-a)\,(y-b) - \frac{1}{2}\sum^x P([x-a][b+k] + [y-b]\,[g-x] - r^2[\alpha-\varphi])\Big] \quad (145$$

Die noch vorhandenen Integrale stellen den Einfluss der Axialkraft dar, welcher gewöhnlich vernachlässigt wird. Setzt man N_x mit V_x nach 31) 29) ein, und führt die Integrationen aus, so ergeben sich

$$\frac{1}{EF}\int_0^x N_x\,dx = \frac{m}{A}\Big[Vx(2g-x) + H\,(xy + kx - gy + r^2\,[\varphi_0 - \varphi]) - \sum^x P(x-a)(2g-x-a)\Big] \quad (146$$

$$\frac{1}{EF}\int_0^x N_x\,dx = \frac{m}{A}\Big[Hx(2g-x) - V\,(xy + kx - gy - r^2\,[\varphi_0 - \varphi]) - \sum^x P\,([g-x]\,[y+k] - [g-a]\,[b+k] + r^2\,[x-\varphi])\Big] \quad (147$$

Die Gleichungen 143) —145) mit 146) 147) bilden die allgemeinsten Ausdrücke für die Formänderungen kreisförmiger

Bogenträger mit constantem Querschnitt. Sie gelten für symmetrische und unsymmetrische Träger bei beliebiger Belastung, beliebigen Temperaturänderungen und beliebig vielen Gelenken. Schreibt man diese Gleichungen für $x = l$ an, so bestimmen sich daraus für Träger ohne Gelenk H, M, M', für Träger mit 2 Gelenken H, $\triangle \varphi_0$, φ_l, für Träger mit 3 Gelenken $\triangle \varphi_0$, $\triangle \varphi_l$, während hier H nach 75) schon bekannt ist. Da somit die Aufgabe als gelöst zu betrachten ist, und um keine zu complicirten Formeln anschreiben zu müssen, fassen wir im Weiteren nur noch symmetrische Kreisbogenträger in's Auge.

Bei symmetrischen Trägern sind $g = \frac{l}{2}$ und für $x = l$ $y = c = 0$, $\varphi = \varphi_l = -\varphi_0$, es werden unter gleichzeitiger Beachtung von 37) die 3 Bedingungsgleichungen

$$\triangle \varphi_l = \triangle \varphi_0 + \frac{2}{A}\left[(M + M')\varphi_0 - H(l - 2k\varphi_0) - \frac{1}{2}\sum^{l} P(2b - 2a\alpha - l[\varphi_0 - \alpha])\right] \quad (148$$

$$\triangle l = \varepsilon \tau l + \frac{1}{A}\left[(M + M')(l - 2k\varphi_0) - H(4k^2\varphi_0 - 3kl + 2r^2\varphi_0) + \sum^{l} P(a[l - a - 2k\alpha] - k[l\varphi_0 - l\alpha - 2b])\right] - \frac{m}{A}\left[H(kl + 2r^2\varphi_0) + \sum^{l} P a(l - a)\right] \quad (149$$

$$\triangle c = l\triangle\varphi_0 + \frac{1}{A}\left[(M + M')l\varphi_0 - (M - M')(k - d) - Hl(l - 2k\varphi_0) - \frac{1}{2}\sum^{l} P(b[l + 2a] + [l - 2a][\alpha l + d] - \varphi_0 l^2 + 2\alpha r^2)\right] - \frac{m}{A}\left[(M - M')(k - d) + \frac{1}{2}\sum^{l} P([l - 2a][b + d] - 2\alpha r^2)\right] \quad (150$$

In der letzten Formel ist zur Abkürzung gesetzt

$$d = \frac{2r^2\varphi_0}{l} \quad (151$$

b) Bogen mit einem festgespannten und einem frei schwebenden Ende (§ 7).

Für diese sind M, V durch 49) 50) bekannt und geben die Gleichungen 143) —147) mit $H = 0$ und $\triangle \varphi_0 = 0$ unmittelbar die Formänderungen.

c) Symmetrische Bogen mit 3 Gelenken (§ 9).

Es sind $M = 0$, $M' = 0$, H durch 76) bestimmt. Die Aenderungen von φ, x, y ergeben sich mit $M = 0$ aus 143) —147) sobald $\triangle \varphi_0$ bekannt ist. Dieser Werth findet sich aber aus 150)

$$\triangle \varphi_0 = \frac{\triangle c}{l} + \frac{1}{A}\Big[H(l - 4k\varphi_0)l + \frac{1}{2}\overset{l}{\Sigma} P(b[l + 2a] + [l - 2a][\alpha l + d] - \varphi_0 l^2 + 2\alpha r^2)\Big] + \frac{m}{A}\overset{l}{\Sigma} P([l - 2a][b + d] - 2\alpha r^2) \qquad (152$$

worin, wenn die Widerlager vollständig fest angenommen werden, $\triangle c = 0$ zu setzen ist. Der Ausdruck mit dem Factor m stellt den geringen Einfluss der Axialkraft dar.

d) Symmetrische Bogen mit 2 Gelenken (§ 10).

Hier hat man ebenfalls $M = 0$, $M' = 0$. Der Horizontalschub folgt damit aus 149)

$$H = \frac{\overset{l}{\Sigma} P(a[l - a - 2k\alpha] - k[l\varphi_0 - l\alpha - 2b]) - m\overset{l}{\Sigma} Pa(l - a) - A(\triangle l - \varepsilon\tau l)}{4k^2\varphi_0 + 2r^2\varphi_0 - 3kl + m(2r^2\varphi_0 + kl)} \qquad (153$$

Sind Temperaturdifferenzen und Ausweichen der Widerlager nicht zu berücksichtigen, so hat man mit $\tau = 0$, $\triangle l = 0$

$$H = \frac{\overset{l}{\Sigma} P(a[l - a - 2k\alpha] - k[l\varphi_0 - l\alpha - 2b]) - m\overset{l}{\Sigma} Pa(l - a)}{4k^2\varphi_0 + 2r^2\varphi_0 - 3kl + m(2r^2\varphi_0 + kl)} \qquad (154$$

Der Einfluss der Temperaturdifferenzen ist allein

$$H = \frac{A l \varepsilon \tau}{4k^2\varphi_0 + 2r^2\varphi_0 - 3kl + m(2r^2\varphi_0 + kl)} \quad (155$$

und der Einfluss eines Ausweichens der Widerlager

$$H = -\frac{A \triangle l}{4k^2\varphi_0 + 2r^2\varphi_0 - 3kl + m(2r^2\varphi_0 + kl)} \quad (156$$

Soll, wie gewöhnlich geschieht, der Einfluss der Axialkraft vernachlässigt werden, so hat man einfach in vorstehenden Gleichungen die Grössen mit dem Factor m wegzulassen.

Zur Bestimmung der Schnittlinie S der Kämpferdrücke folgen für eine bei a, b, α angreifende Einzellast P aus 86) 154) genügend genau

$$V = \frac{l-a}{l} P$$

$$H = \frac{a(l-a-2k\alpha) - k(l\varphi_0 - l\alpha - 2b)}{4k^2\varphi_0 + 2r^2\varphi_0 - 3kl} P$$

so dass nach 89) die Gleichung der Kämpferdrucklinie S

$$b' = \frac{4k^2\varphi_0 + 2r^2\varphi_0 - 3kl}{a(l-a-2k\alpha) - k(l\varphi_0 - l\alpha - 2b)} \frac{a(l-a)}{l} \quad (157$$

Der Index (') wurde gegeben, um die Ordinate der Kämpferdrucklinie von der Ordinate b der Trägeraxe bei gleicher Abscisse a zu unterscheiden. Speciell für $a = 0$ oder l liefert vorstehende Gleichung für b' den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$. Bildet man jedoch unter Beachtung der durch 138) 139) bestimmten Werthe von a, b das Verhältniss der ersten Derivirten von Zähler und Nenner, so ergibt sich für $a=0$ und l

$$b'_0 = \frac{4k^2\varphi_0 + 2r^2\varphi^0 - 3kl}{l - 2k\varphi_0} \quad (158$$

Die Formänderungen sind wie bei Trägern mit 3 Gelenken durch 143) – 147) bestimmt, wozu $\triangle\varphi_0$ aus 152) zu berechnen ist.

e) Symmetrische Bogen ohne Gelenk (§ 11).

Ist der Einfluss der Axialkraft zu berücksichtigen, so verwendet man zur Berechnung von M, M', H am einfachsten die Gleichungen 148)—150), worin $\triangle l = 0$, $\triangle c = 0$, $\triangle \varphi_0 = 0$, $\triangle \varphi_l = 0$ zu setzen sind, wenn kein Ausweichen der Widerlager in Betracht kommt. Indessen wird man bei Brückenträgern ohne Gelenke immer den Einfluss der Axialkraft vernachlässigen können, da man nie auf absolut festgespannte Enden und also auch nicht auf allzugrosse Genauigkeit der Berechnung zählen kann. Lässt man nun in 148)—150) die Glieder mit dem Factor m weg, so ergibt die Auflösung

$$H = \frac{\sum^{l} P\,(2b\,l - l\,[l - 2a]\,[\varphi_0 - \alpha] - 2a^2\varphi_0) + 2A\varphi_0\,(l\,\varepsilon\,\tau - \triangle l) + A\,(l - 2k\varphi_0)\,(\triangle \varphi_l - \triangle \varphi_0)}{2\,l\,(k\varphi_0 + d - l)} \quad (159$$

$$M = H\left(\frac{l}{2\varphi_0} - k\right) + \frac{1}{4\varphi_0\,(k-d)} \sum^{l} P\,([l - 2a]\,[b - d]\,\varphi_0 + 2r^2\alpha\varphi_0 + [k - d]\,[2b - 2a\alpha - l\varphi_0 + l\alpha]) + \frac{A}{4\varphi_0\,(k-d)} \cdot ([l\varphi_0 - k + d]\triangle\varphi_0 + [l\varphi_0 + k - d]\triangle\varphi_l - 2\triangle c) \quad (160$$

$$M' = H\left(\frac{l}{2\varphi_0} - k\right) - \frac{1}{4\varphi_0\,(k-d)} \sum^{l} P\,([l - 2a]\,[b - d]\,\varphi_0 + 2r^2\alpha\varphi_0 - [k - d]\,[2b - 2a\alpha - l\varphi_0 + l\alpha]) - \frac{A}{4\varphi_0\,(k-d)} \cdot ([l\varphi_0 - k + d]\triangle\varphi_l + [l\varphi_0 + k - d]\triangle\varphi_0 - 2\triangle c) \quad (161$$

Sind Temperaturänderungen und Ausweichen der Widerlager nicht zu berücksichtigen, so werden

$$H = \frac{\sum^{l} P(2b\,l - l[l - 2a]\,[\varphi_0 - \alpha] - 2a^2\varphi_0)}{2\,l\,(k\varphi_0 + d - l)} \quad (162$$

$$M = H\left(\frac{l}{2\varphi_0} - k\right) + \frac{1}{4\varphi_0\,(k-d)} \sum^{l} P\,([l - 2a]\,[b - d]\,\varphi_0 + 2r^2\alpha\varphi_0 + [k - d]\,[2b - 2a\alpha - l\varphi_0 + l\alpha]) \quad (163$$

$$M' = H\left(\frac{l}{2\varphi_0} - k\right) - \frac{1}{4\varphi_0(k-d)} \sum^{l} P\left([l-2a][b-d]\varphi_0 + 2r^2\alpha\varphi_0 - [k-d][2b-2a\alpha - l\varphi_0 + l\alpha]\right) \quad (164$$

Der Einfluss einer Temperaturänderung allein beträgt

$$H = \frac{A\varphi_0\varepsilon\tau}{k\varphi_0 + d - l} \quad (165$$

$$M = M' = H\left(\frac{l}{2\varphi_0} - k\right) = \frac{l-2k\varphi_0}{k\varphi_0 + d - l} \cdot \frac{A\varepsilon\tau}{2} \quad (166$$

und greift also der von der Temperaturänderung herrührende Horizontalschub um $\frac{l}{2\varphi_0} - k$ über den Stützpuncten an.

Für den Einfluss eines Ausweichens der Widerlager hat man

$$H = -\frac{2\varphi_0 \triangle l - (l-2k\varphi_0)(\triangle\varphi_l - \triangle\varphi_0)}{k\varphi_0 + d - l} \cdot \frac{A}{2l} \quad (167$$

$$M = H\left(\frac{l}{2\varphi_0} - k\right) + \frac{A}{4\varphi_0(k-d)}\left([l\varphi_0 - k + d]\triangle\varphi_0 + [l\varphi_0 + k - d]\triangle\varphi_l - 2\triangle c\right) \quad (168$$

$$M' = H\left(\frac{l}{2\varphi_0} - k\right) - \frac{A}{4\varphi_0(k-d)}\left([l\varphi_0 - k + d]\triangle\varphi_l + [l\varphi_0 + k - d]\triangle\varphi_0 - 2\triangle c\right) \quad (169$$

Tritt nur eine Aenderung der Spannweite um $\triangle l$, kein Neigen und Senken der Widerlager ein, so hat man

$$H = -\frac{A\varphi_0}{k\varphi_0 + d - l} \cdot \frac{\triangle l}{l} \quad (170$$

$$M = M' = H\left(\frac{l}{2\varphi_0} - k\right) = -\frac{l-2k\varphi_0}{k\varphi_0 + d - l} \cdot \frac{A\triangle l}{2l} \quad (171$$

und greift also dies H ebenfalls um $\frac{l}{2\varphi_0} - k$ über den Stützpuncten an. $\triangle l$ ist positiv oder negativ, je nachdem

eine Vergrösserung oder Verkleinerung der Spannweite stattgefunden hat.

Für die Schnittlinie und Umhüllungslinie der Kämpferdrücke ergeben sich ausserordentlich complicirte Formeln, wesshalb diese Linien eventuell besser nach der in § 11 angedeuteten Methode verzeichnet werden. Uebrigens genügt es für Bestimmung der Belastungsgrenzen auch, dieselben Formeln S, U, U' wie beim parabolischen Träger mit eingespannten Enden zu verwenden.

Die Formänderungen sind unmittelbar durch 143) — 147) bestimmt und darin, wenn kein Ausweichen der Widerlager in Betracht kommt, $\triangle\varphi_0 = 0$ zu setzen.

§. 14. Beispiele.

Um die Anwendung der allgemeinen Formeln in speciellen Fällen zu zeigen und die Resultate verschiedener Formeln vergleichen zu können, mögen einige Beispiele folgen. Ich beziehe dieselben auf die Coblenzer Brücke (Fachwerkbogen mit 2 Gelenken), deren Träger zwar bis nahe an die Stützpuncte (wo gerade Tangenten anschliessen) kreisbogenförmige Axe haben, aber als Parabelbogen berechnet wurden. Der Berechnung wurden zu Grunde gelegt Spannweite $l = 98{,}07750$m, Pfeil $f = \frac{l}{11} = 8{,}91614$m, Entfernung der Gurtungsschwerpuncte $b_0 = 2{,}97214$m. Das mittlere Trägheitsmoment ist $\Theta = 0{,}37344$, der mittlere Gurtungsquerschnitt $F = 0{,}08455$qm, und unter Voraussetzung von $E = 20000000$tn pro qm parabolischer Bogenaxe erhält man die Mittelwerthe

$$A = E\,\Theta\cos\varphi = 7299400$$

$$m = \frac{\Theta}{F} = 2{,}20840\,\text{qm}$$

Beispiel 1. Für die Coblenzer Brücke wurden ange-

nommen als mittlere Aufstellungstemperatur $t_0 = 10^0$, als grösste vorkommende Abweichungen $\tau = \pm 30^0$. Unter Annahme einer parabolischen Axe und eines $\varepsilon = 0{,}000012$ (Mittel von Lavoisier & Laplace und Dulong & Petit) den Einfluss der Temperaturänderungen auf die Beanspruchungen festzustellen.

Wegen $g = \frac{l}{2}$ folgen aus 102) und aus 104) mit $x = 0$

$$\frac{k}{l} = \frac{11}{8} \qquad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{4}{11}$$

$$\varphi_0 = 19^0 58' 59'' = \frac{19{,}98306 \cdot 3{,}14159}{180} = 0{,}34877$$

Nun ergibt 114) nach Einsetzen der bekannten Werthe für $\tau = +30^0$

$$H = \frac{39416{,}760}{635{,}980 + 14{,}387 m}$$

so dass bei $m = 2{,}2084$ mit Rücksicht auf die Axialkraft

$$H = 59{,}029 \text{ tn}$$

und ohne Rücksicht auf dieselbe, weil dann das Glied mit m wegfällt,

$$H = 61{,}978 \text{ tn}.$$

Nach 86) 87) ist die Temperatur auf die Verticalreactionen der Kämpfer ohne Einfluss, dagegen erhält man aus 88) 31) — 33) 18)

$$M_x = -Hy = -59{,}029\, y$$
$$N_x = H \cos \varphi = 59{,}029 \cos \varphi$$
$$T_x = -H \sin \varphi = -59{,}029 \sin \varphi$$

$$\operatorname{tg} \psi = 0 \qquad e = -\frac{y}{\cos \varphi}$$

Wie selbstverständlich fällt also die Stützlinie mit der die Stützpuncte verbindenden Horizontalen zusammen und ist für jeden Querschnitt die Resultante $R_x = H$. Von den Widerlagern aus nach dem Scheitel hin nimmt M_x proportional der

Ordinate y zu und N_x ebenso von $59{,}029\cos\varphi_0$ bis 59,029 während T_x von $-59{,}029\sin\varphi_0$ bis 0 abnimmt.

Für die Beanspruchungen der obern und untern Gurtung hat man, wenn, wie bei Berechnung der Coblenzer Brücke, die Bogenaxe in Mitte der Gurtungsschwerlinien angenommen wird, nach 26) 27) *)

$$Q_1 = 29{,}514\cos\varphi - 19{,}861\,y$$
$$Q_2 = 29{,}514\cos\varphi + 19{,}861\,y$$

Die ungünstigsten Gurtungsbeanspruchungen treten im Scheitel ein, wo mit $\varphi = 0$, $y = f = 8{,}91614$

$$Q_1 = -147{,}568\,\text{tn} \cdot \qquad Q_2 = 206{,}596\,\text{tn}$$

und da bei der Coblenzer Brücke die Gurtungsquerschnitte im Scheitel $F_1 = F_2 = 768{,}13\,\text{qcm}$, so hat man daselbst pro qcm bezw.

$$-\frac{147568}{768{,}13} = -192{,}11\,\text{k}$$
$$\frac{206596}{768{,}13} = +268{,}96\,\text{k}$$

Bei $\tau = -30°$ ändern H und alle Beanspruchungen einfach ihr Vorzeichen. Es wird also die untere Gurtung stärker durch Temperaturänderungen beeinflusst als die obere.

Beispiel 2. Den Einfluss der Temperaturänderungen auf die Coblenzer Brücke unter Beibehaltung des Verhältnisses $\frac{f}{l} = \frac{1}{11}$ und Voraussetzung einer überall kreisbogenförmigen Axe zu bestimmen.

---

*) Bei Berechnung der Coblenzer Brücke wurden anstatt der Formeln 26) 27) angenommen $Q_1 = Q_2 = \frac{M_x}{f_0}$, so dass sich für beide Gurtungen gleiche Temperatureinflüsse ergaben; ausserdem wurde dort der Querschnitt constant vorausgesetzt.

Aus 141) 142) folgen

$$r = \frac{125}{88}\, l = 139{,}34615\,\text{m}$$

$$\varphi_0 = 20^\circ 36' 35'' = \frac{20{,}60972 \,.\, 3{,}14159}{180} = 0{,}35969$$

Mit diesen Werthen, den gegebenen mittleren Θ, F und

$$k = r - f = 130{,}43001\,\text{m}$$

liefert 155) nach Substitution von 136)

$$H = \frac{3783{,}9}{61{,}55 + 26754{,}4\,\text{m}}$$

Hieraus erhält man ohne Rücksicht auf die Axialkraft

$$H = 61{,}477\,\text{tn}^* \quad (61{,}978)$$

und, weil nach 137)

$$26754{,}4\,\text{m} = 6{,}0884\,,$$

mit Rücksicht auf die Axialkraft

$$H = 55{,}943\,\text{tn} \quad (59{,}029)$$

Die in Klammer beigesetzten Werthe hatten sich unter Voraussetzung einer parabolischen Bogenaxe ergeben. Alle weiteren Werthe finden sich jetzt ganz wie in Beispiel 1.

Beispiel 3. Den Einfluss der Temperaturänderungen auf die Beanspruchungen der Coblenzer Brücke für den Fall zu ermitteln, dass bei gleichen Dimensionen und parabolischer Axe an Stelle der Gelenke festgespannte Trägerenden gedacht werden.

Unter Vernachlässigung des Einflusses der Axialkraft erhält man für $\tau = +30^\circ$ aus 127) 128)

$$H = 371{,}868\,\text{tn} \quad (= 6 \,.\, 61{,}978)$$

$$M = M' = \frac{2}{3} H f = 2210{,}418\,\text{mtn}$$

Mit diesen Werthen liefern 30)—33) und 18)

$$M_x = H\left(\frac{2}{3} f - y\right) = 371{,}868\,(5{,}944 - y)$$

$$N_x = H \cos\varphi = 371{,}868 \cos\varphi$$

$$T_x = -H \sin\varphi = -371{,}868 \sin\varphi$$

$$\operatorname{tg}\psi = 0 \qquad e = \frac{\frac{2}{3}f - y}{\cos\varphi}$$

Die Stützlinie ist eine $^2/_3$ f über den Stützpuncten liegende Horizontale und für alle Querschnitte $R_x = H$. Die Momente sind unterhalb $y = {}^2/_3 f$ positiv, darüber hinaus negativ. N_x und T_x variiren ganz wie bei 2 Gelenken, nur sind sie 6 mal so gross.

Für die Beanspruchungen der obern und untern Gurtung erhält man, wenn wieder die Bogenaxe in Mitte der Gurtungsschwerlinien angenommen wird, aus 26) 27)

$$Q_1 = 185{,}934 \cos\varphi - 125{,}118\, y + 743{,}712$$
$$Q_2 = 185{,}934 \cos\varphi + 125{,}118\, y - 743{,}712$$

Die grössten Werthe können im Scheitel oder bei den Kämpfern auftreten. Im Scheitel werden mit $\varphi = 0$, $y = f$:

$$Q_1 = 235{,}923\,\text{tn} \qquad Q_2 = +507{,}791\,\text{tn}$$

und wegen $F_1 = F_2 = 768{,}13\,\text{qcm}$ die Beanspruchungen pro qcm bezw.

$$-307{,}14\,\text{k} \qquad 661{,}08\,\text{k}$$

Bei den Kämpfern ergeben sich mit $\varphi = \varphi_0 = 19^\circ 58' 59''$, $y = 0$

$$Q_1 = +918{,}452\,\text{tn} \qquad Q_2 = -568{,}972\,\text{tn}$$

und, da dort $F_1 = F_2 = 800{,}624\,\text{qcm}$, die Beanspruchungen pro qcm

$$+1147{,}17\,\text{k} \qquad -710{,}66\,\text{k}$$

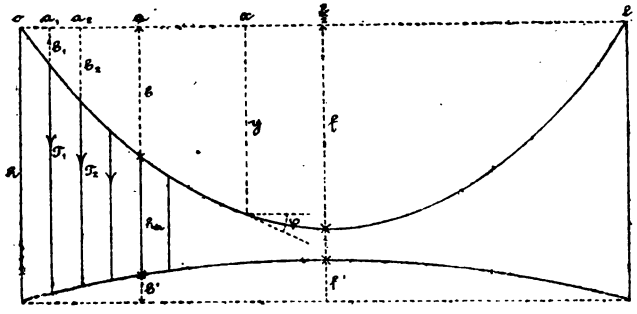
Für $\tau = -30^\circ$ ändern alle berechneten Werthe ihr Vorzeichen.

Vorstehende Berechnung zeigt, dass die jetzigen Querschnitte der Coblenzer Brücke bei eingespannten Enden nicht einmal zur Uebertragung der von den Temperaturdifferenzen herrührenden Beanspruchungen genügen würden.

§. 15. Ueber Kettenbrückenlinien.

Die Ableitung der Beziehungen für spezielle Ketten linien, zu welchen auch die Kettenbrückenlinien gehören, bildet ein besonderes Capitel der Ingenieurmechanik, nur auf Eines möchte ich hier hinweisen. Bei Berechnung der Kettenbrücken kommt es ganz wesentlich darauf an, die Gleichung der Kettenlinien möglichst genau zu erhalten, um danach die Längen der Tragstangen und der Kettenstücke zwischen den Letzteren so ermitteln zu können, dass Verlegenheiten bei der Zusammensetzung ausgeschlossen sind. Es gilt nun die

Fig. 42.



Navier'sche Gleichung der Kettenlänge als die zuverlässigste; da jedoch bei ihrer Ableitung nur stetig vertheilte Lasten angenommen werden, während in den Befestigungsstellen der Tragstangen concentrirte Lasten angreifen, und da in

$$ds = dx\left[1 + \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\varphi + \ldots\right]$$

alle Glieder vom Dritten ab er nachlässigt werden, so liefert die Navier'sche Gleichung kaum wesentlich genauere Werthe als die Annahme einer parabolischen Kettenlinie, die man doch nicht für genügend hält.

Nimmt man, was jedenfalls gestattet ist, mit Navier wenigstens das Eigengewicht der Kette allein einer Parabel entsprechend an, so hat man für dasselbe von 0 bis x bei gleichen Stützhöhen

$$kx\left(1+\frac{3l^2-6lx+4x^2}{24a^2}\right)$$

worin k Kettengewicht pro Längeneinheit und

$$a=\frac{l^2}{8f} \qquad (172$$

Alsdann Verticalkraft bei x nach 61)

$$V_x=V-\overset{x}{\Sigma}T-kx\left(1+\frac{3l^2-6lx+4x^2}{24a^2}\right) \qquad (173$$

worin $\overset{x}{\Sigma}$ nur noch die von den Tragstangen aufgenommenen Lasten enthält. Weil nun

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{dy}{dx}=\frac{V_x}{H} \qquad (174$$

so erhält man durch Integration (Note 1) die genaueste Gleichung der Kettenbrückenlinie für gleiche Stützhöhen

$$y=\frac{1}{H}\left[Vx-\overset{x}{\Sigma}T(x-a)-\frac{kx^2}{2}\left(1-\frac{3l^2-4lx+4x^2}{24a^2}\right)\right] \qquad (175$$

Mit $x=0$, $y=0$ folgt hieraus die Verticalreaction der Pilone 0

$$V=\frac{kl}{2}\left(1+\frac{l^2}{24a^2}\right)-\frac{1}{l}\overset{l}{\Sigma}T(l-a) \qquad (176$$

und mit $x=g=\frac{l}{2}$, $y=f$ der Horizontalschub

$$H=\frac{1}{f}\left[Vg-\overset{g}{\Sigma}T(g-a)-\frac{kl^2}{8}\left(1+\frac{\frac{1}{2}l^2}{16a^2}\right)\right] \qquad (177$$

Bei der Berechnung von Kettenbrücken mit gleichen Stützhöhen ist immer die Belastung symmetrisch und bedeutet dann f den gegebenen Pfeil der Kette. Da man wegen der nöthigen Berechnung der Tragstangenlängen die y bei allen

Knotenpuncten kennen muss, so ergeben sich leicht die Kettenlängen zwischen je zweien der Letzteren

$$\triangle s = \sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} \qquad (178$$

worin $\triangle x$, $\triangle y$ die Aenderungen von x, y zwischen diesen Knotenpuncten. Die Länge einer Tragstange bei a ist (Fig. 42.)

$$h_a = h - b - b' \qquad (179$$

worin bei parabolischer Fahrbahn

$$b' = \frac{4f'}{l^2}(l - a)\,a \qquad (180$$

Für die mit der Tragstange bei a angreifende concentrirte Last hat man, wenn ε das Gewicht pro Längeneinheit Fahrbahn, d die Fahrbahnlänge pro Tragstange und σ das Gewicht pro Längeneinheit Tragstange

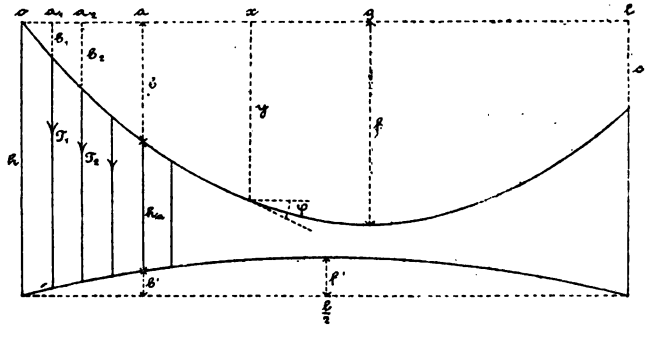
$$T = \varepsilon d + \sigma h_a \qquad (181$$

Hiefür kann h_a aus einer vorläufigen Figur entnommen werden, in welcher die Kette als Parabel verzeichnet wird, oder man hat

$$T = \varepsilon d + \sigma \left[h - \frac{4(f+f')}{l^2}(l - a)\,a\right] \qquad (182$$

Bei horizontaler Fahrbahn sind $f = 0$, $b' = 0$.

Fig. 43.



Bei Kettenbrücken mit verschiedenen Stützhöhen

ergeben sich an Stelle der vorstehenden Gleichungen für α, V_x, y, V, H, h_x, T

$$\alpha = \frac{l^2(c-f+\sqrt{f^2-fc})(f-\sqrt{f^2-fc})}{2c^2\sqrt{f^2-fc}} \quad (183$$

$$V_x = V - \overset{x}{\Sigma}T - kx\left(1 + \frac{c^2}{2l^2} + \frac{c}{l}\frac{l-x}{2\alpha} + \frac{3l^2-6lx+4x^2}{24\alpha^2}\right) \quad (184$$

$$y = \frac{1}{H}\left[Vx - \overset{x}{\Sigma}T(x-a) - \frac{kx^2}{2}\left(1 + \frac{c^2}{2l^2} + \frac{c}{l}\frac{3l-2x}{6\alpha} + \frac{3l^2-4lx+2x^2}{24\alpha^2}\right)\right] \quad (185$$

$$V = \frac{c}{l}H + \frac{1}{l}\overset{1}{\Sigma}T(l-a) + \frac{kl}{2}\left(1 + \frac{c^2}{2l^2} + \frac{c}{6\alpha} + \frac{l^2}{24\alpha^2}\right) \quad (186$$

$$H = \frac{1}{fl-gc}\left[\frac{kl^2}{2}\left(1 + \frac{c^2}{2l^2} + \frac{c}{6\alpha} + \frac{l^2}{24\alpha^2}\right) - \frac{klg^2}{2}\left(1 + \frac{c^2}{2l^2} + \frac{c}{l}\frac{3l-2g}{6\alpha} + \frac{3l^2-4lg+2g^2}{24\alpha^2}\right) - \overset{g}{\Sigma}T(g-a)\right] \quad (187$$

$$T = \varepsilon d + \sigma\left[h - \frac{c}{l}a + \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{4f'}{l^2}\right)(l-a)a\right] \quad (188$$

wobei der Fahrbahnscheitel in der Mitte gedacht ist. Die Gleichungen 174) 178) — 181) bleiben gültig. Die Abscisse des Kettenscheitels kann mit genügender Genauigkeit der Parabel entsprechend bei

$$g = \frac{l}{c}\left(f - \sqrt{f^2-fc}\right) \quad (189$$

angenommen werden, doch lässt sich dieselbe auch vollständig scharf berechnen.

Wird bei gleichen Stützhöhen der Ursprung der Coordinaten in den Kettenscheitel verlegt, so ergeben sich an Stelle von 173) 175) 179) 180) 182) die folgenden Gleichungen

$$V_x = \overset{x}{\Sigma} T + kx\left(1 + \frac{32\,f^2}{3l^2}x^2\right) \qquad (190$$

$$y = \frac{1}{H}\left[\overset{x}{\Sigma} T(x-a) + \frac{kx^2}{2}\left(1 + \frac{32\,f^2}{3\,l^2}x^2\right)\right] \qquad (191$$

$$h_a = h - f - f' + b + b' \qquad (192$$

$$b' = \frac{4\,f'}{l^2}a \qquad (193$$

$$T = \varepsilon d + \sigma\left[h - f - f' + \frac{f+f'}{l^2}4a^2\right] \qquad (194$$

während die übrigen Gleichungen gültig bleiben.

Bei horizontaler Fahrbahn sind überall $f' = 0$, $b' = 0$.

Anhang.

§. 26. Ueber Anwendung und Berechnung elastiger Bogenträger.

Bei Anwendung elastiger Bogenträger wird man sich zunächst fragen, ob und wieviel Gelenke angeordnet werden sollen. Drei Gelenke bringen mancherlei Vortheile mit sich. So lassen sich, wie wir gesehen haben, alle Spannungen ohne Zuhülfenahme der auf Hypothesen beruhenden Elasticitätsgleichungen ermitteln, nur für Ableitung der Formänderungen sind Letztere nöthig. Sodann haben Temperaturänderungen und geringes Ausweichen der Widerlager keinen wesentlichen Einfluss auf die Beanspruchungen. Schliesslich scheint sogar eine nicht unbedeutende Materialersparniss gegenüber Bogen mit drei Gelenken vorhanden zu sein. Engesser kommt von theilweise theoretischen Ausgangspuncten dazu, dass Bogen mit 2 Gelenken etwa 15 (grosse Spannweite) bis 20% (kleine Spannweiten) mehr Material erfordern als solche mit drei Gelenken. — Andrerseits wird gegen Bogen mit drei Gelenken besonders geltend gemacht, dass das Scheitelgelenk mit der Zeit leicht lose wird,

besonders wenn der Träger wie bei Eisenbahnbrücken starken Erschütterungen ausgesetzt ist. Sobald das Gelenk aber auch nur im Geringsten lose ist, müssen bei jedem Passiren des Scheitels durch concentrirte Lasten für den ganzen Träger stark stossende Beanspruchungen entstehen, die für die Dauer der Construction vom grössten Nachtheil sind. Auch wird ohne Scheitelgelenk die Construction etwas einfacher. — Bei Bogen ohne Gelenk sind die Einflüsse der Temperaturänderungen und des Ausweichens der Widerlager weit grösser als bei Bogen mit zwei Gelenken, dagegen sind solche Träger in constructiver Hinsicht am einfachsten. Manche nehmen an, dass sie auch weniger Material erfordern als Bogen mit zwei Gelenken, was aber schon mit Rücksicht auf § 15 Beispiel 3 ganz unwahrscheinlich klingt. Ueberdies ist die Voraussetzung der Theorie „bei jeder Belastung überall flach aufsitzende Trägerenden" schwer zu erfüllen. Man wird also zu Bogen ohne Gelenk nur selten greifen. Dagegen empfehlen sich Bogen mit 2 Gelenken besonders bei Eisenbahnbrücken, Bogen mit 3 Gelenken bei gut chaussirten Strassenbrücken, weil hier die Stösse gemildert werden.

Nachdem die Anzahl der Gelenke festgestellt ist, wird man sich mit der Form der Trägeraxe beschäftigen. Theoretisch sind Parabelbogen am vorheilhaftesten, weil für diese bei über den ganzen Träger gleichmässig vertheilter Belastung (annähernd bei Eigengewicht allein und Totalbelastung) keinerlei Biegungsmomente entstehen, also nach 35) auch keine Transversalkräfte, während nach 18) N_x in der Axe angreift, und sich gleichmässig über den Querschnitt vertheilt, was wieder die kleinsten Beanspruchungen zur Folge hat. Dass sowohl für Parabelträger ohne Gelenk als mit 2 und 3 Gelenken bei der erwähnten Belastung überall $M_x = 0$ ist, lässt sich z. B. wie folgt beweisen. Aus 76) 117) 124) folgt mit $P = uda$ wo u die Belastung pro l. m., für alle 3 Fälle

$$H = \frac{u\,l^2}{8f} \qquad (195$$

aus 37) ebenso und weit für symmetrisch geformte und belastete Träger immer $M = M'$

$$V = \frac{u\,l}{2} \qquad (196$$

Substituirt man diese Werthe, sowie

$$\sum^{x} P(x - a) = \frac{u\,x^2}{2}$$

$$y = \frac{4f}{l^2}(l - x)x$$

in die allgemeine Gleichung 30) so folgt

$$M_x = M$$

Bei Bogen mit Kämpfergelenken ist aber $M = 0$ und derselbe Werth ergiebt sich bei Bogen ohne Gelenk mit $P = u\,d\,a$ aus 125). Für alle 3 Arten von Bogenträgern sind also bei parabolischer Axe und über die ganze Länge gleichmässig vertheilter Belastung die Beanspruchungen genau gleich, die Gelenke haben dann keinen Einfluss. Durch Substition der aus 104) folgenden Werthe von sin φ, cos φ sowie mit 195) und $V_x = \frac{u\,l}{2} - u\,x$ ergibt sich aus 31) die Normalkraft bei x

$$N_x = u\sqrt{k^2 + (g-x)^2} = \frac{u}{8f}\sqrt{l^4 + 16\,f^2(l-2x)^2} \qquad (197$$

und dieser Werth wird am grössten bei den Kämpfern, wo

$$N_x = u\sqrt{k^2 + g^2} = \frac{u\,l}{8f}\sqrt{l^2 + 16\,f^2} \qquad (198$$

Es kann aus Rücksicht auf einfachere Herstellung vorgezogen werden, dem Bogen kreisförmige Axe zu geben. Genau genommen wären dann H, M, M' und die Formänderungen nach § 13 zu berechnen. Man hat es jedoch z. B. bei Berechnung der Coblenzer Brücke für genügend gefunden, auch in diesem Falle die einfacheren Gleichungen für Parabelbogen-

träger zu verwenden, welche allerdings damals noch complicirt genug waren.

Ist die Form angenommen, so wird es sich darum handeln, welche Belastung der Rechnung zu Grunde gelegt werden soll. Die Verkehrsbelastung ist pro 1 m natürlich ebenso gross wie bei Balkenträgern von gleicher Spannweite, worüber genug Angaben existiren. Was das Eigengewicht betrifft, so liefert die geringe Anzahl ausgeführter Bogenbrücken noch wenig Anhaltspuncte. Indessen hat Engesser in Zeitschr. f. Bauw. 1877 S. 207—220 für Träger mit 2 und 3 Gelenken Formeln aufgestellt (Vgl. Zeitschr. f. Bauk. 1878 S. 108), von welchen man bis auf Weiteres Gebrauch machen kann.

Ueber den Gang der Berechnung sei kurz Folgendes bemerkt. Der Gurtungsquerschnitt wird, wenn variabel, bald oben bald unten grösser. Die in Rechnung gezogene Axe kann natürlich diesen Verhältnissen nicht folgen, weil sie sonst eine ganz unregelmässige Form erhielte, während eine Parabel oder ein Kreisbogen vorausgesetzt werden. Im Mittel kann man, wie auch bei der Coblenzer Brücke geschehen, die Achse in der Mitte zwischen den Gurtungsschwerlinien annehmen, wenigstens für eine erste Berechnung. Ist dann h_0 die gewünschte Entfernung der Gurtungsschwerlinien, so hat man für Bogen mit durchbrochenen Wandungen, oder für solche mit offenen Wandungen bei vernachlässigter Füllung, die Beanspruchungen der obern und untern Gurtungen im Querschnitt x nach 26) 27)

$$Q_1 = \frac{1}{2} N_x + \frac{M_x}{h_0} \qquad (199$$

$$Q_2 = \frac{1}{2} N_x - \frac{M_x}{h_0} \qquad (200$$

In Bezug auf die weiteren Grössen halte man sich bei Bogen mit 3, 2 Gelenken und ohne Gelenk bezw. an die §§. 9, 10, 11, wo die nöthigen Hinweisungen gegeben sind. Da bei vernachlässigter Füllung die Kernlinien mit den Gurtungs-

schwerlinien zusammenfallen, so lassen sich auch die ungünstigsten Belastungen und damit die Maxima und Minima von Q_1, Q_2 bestimmen. Die Einflüsse der Temperatur können dabei gleichzeitig unter Anwendung eines Schätzungswerths von Θ oder nachträglich (wie in § 14.) berücksicktigt werden, in welch' letzterem Falle freilich die Beanspruchungen pro Quadrateinheit zunächst geringer als zulässig zu wählen wären. Aus den Curven der Maxima und Minima von Q_1 und Q_2 kann man die Gurtungsquerschnitte ermitteln und zwar ebensowohl nach der alten als neuen Dimensionen-Berechnung. Die Curven der positiven und negativen max T_x liefern bei Bogen mit durchbrochenen Wandungen die Querschnitte der Füllungsglieder in der auch bei continuirlichen Balkenträgern üblichen Weise. Für vollwandige Träger würde die Berechnung der Füllung wohl immer zu geringe Stärken ergeben. Man nehme also eine gewünschte Stärke an und controlire nachträglich ihre Beanspruchung (Siehe Weyrauch, Dimensionenberechnung 1877 § 17, wo im vorliegenden Falle nur T_x an Stelle von V_x zu setzen ist). — Anstatt die ungünstigsten Belastungen direct festzustellen, kann man auch wie bei Berechnung der Coblenzer Brücke, die Verkehrsbelastung immer um $\frac{l}{n}$ vorrücken lassen, für jede Stellung die Curven der Q_1, Q_2, T_x auftragen und die Curven der Maxima und Minima als Umhüllungslinien erhalten.

Nachdem die Berechnung in vorstehender Weise erledigt ist, kann man auf Grund der erhaltenen Querschnitte noch eine zweite vornehmen, wobei auch die genaueren Eigengewichte bekannt sind. Jetzt lassen sich alle abgeleiteten Formeln verwenden, doch ist eine nochmalige Bestimmung der ungünstigsten Belastungen überflüssig, weil kleine Verrückungen der Lastgrenzen einen wesentlichen Einfluss nicht ausüben.

Noten.

1. Um zu zeigen, wie über concentrirte Lasten P_1, P_2, ... P_x, welche zwischen 0 und x bei a_1, a_2 ... a_x angreifen, hinweg zu integriren ist, nehmen wir zunächst den einfachsten Fall

$$\int_0^x \Sigma^x P\,dx$$

Man hat

$$\int_0^x = \int_0^{a_1} \Sigma P\,dx + \int_{a_1}^{a_2} \Sigma P\,dx + \int_{a_2}^{a_3} \Sigma P\,dx + \ldots + \int_{a_x}^{x} \Sigma P\,dx$$

In jedem Partielintegral bleibt ΣP unveränderlich, daher

$$\int_0^x = 0 + P_1(a_2 - a_1) + (P_1 + P_2)(a_3 - a_2) + \ldots + (P_1 + P_2 + \ldots + P_x)(x - a_x)$$

$$= P_1(x - a_1) + P_2(x - a_2) + \ldots + P_x(x - a_x) \qquad \text{d. h.}$$

$$\int_0^x \Sigma^x P\,dx = \Sigma^x P(x - a)$$

$$\frac{d\,\Sigma^x P(x-a)}{dx} = \Sigma^x P$$

Eine andere noch bequemere Ableitung solcher Integrale möge gezeigt werden mit

$$\int_0^x \Sigma^x P(x - a)\,dx$$

Man hat

$$\int_0^x = \int_{a_1}^x P_1(x - a_1)\,dx + \int_{a_2}^x P_x(x - a_2)\,dx + \ldots + \int_{a_x}^x P_x(x - a_x)\,d$$

$$= \tfrac{1}{2} P_1(x - a)^2 + \tfrac{1}{2} P_2(x - a_2)^2 + \tfrac{1}{2} P_x(x - a_x)^2$$

$$\int_0^x \Sigma^x P\,(x - a)\,dx = \tfrac{1}{2} \Sigma^x P(x - a)^2$$

Dieses einfache Integrationsverfahren wurde von mir zuerst gezeigt und angewandt in Theorie der Träger, Leipzig, Teubner 1873 § 60 und Zeitsch. f. Math. u. Phys. 1874. Ich halte es

nicht für überflüssig, dies zu betonen, da das Verfahren in der Ingenieurmechanik von allgemeiner Bedeutung ist (es werden damit zahlreiche speciellc Untersuchungen überflüssig) und Andere bereits ohne Quellenangabe Gebrauch davon machten.

2. Alle in unserer Theorie gegebenen Formeln gelten nicht nur für concentrirte sondern auch für beliebige stetig vertheilte Lasten. Wäre z. B. zwischen 0 und x eine gleichmässig vertheilte Last von u pro Längeneinheit, so würde bei a P = u d a und daher

$$\overset{x}{\Sigma} P = \int_0^x u\,da = u\,x$$

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a) = \int_0^x u\,(x-a)\,da = \frac{u\,x^2}{2} \qquad \text{u. s. w.}$$

oder wäre zwischen 0 und x die gleichmässig vertheilte Last

u von a = 0 bis a = e

u' von a = e bis a = x

so würden

$$\overset{x}{\Sigma} P = \int_0^e u\,da + \int_e^x u'\,da = ue + u'(x-e) = u'x + e(u-u')$$

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a) = u\int_0^e (x-a)\,da + u'\int_e^x (x-a)\,da =$$

$$\frac{u'x^2}{2} + \frac{e}{2}(u-u')(2x-g)$$

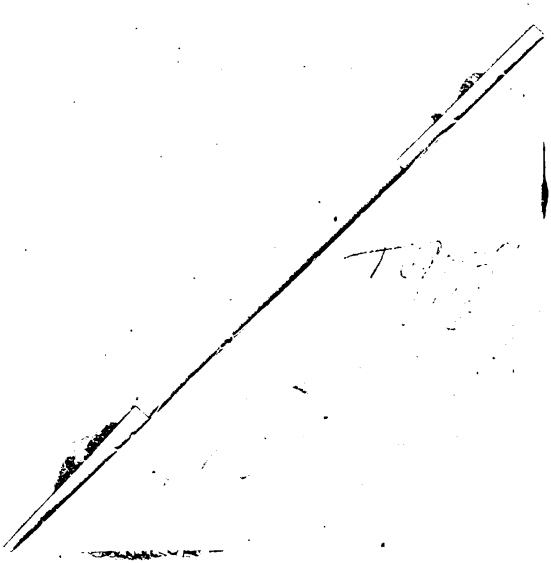
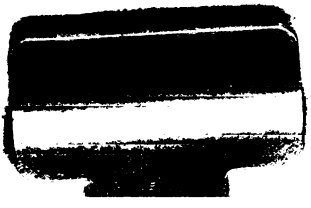
In dieser Weise lassen sich die Formeln für stetig vertheilte Lasten aus den allgemeinen Gleichungen ableiten, die Art der Belastung hat nur Einfluss auf die Werthe der Σ. Da man sich jedoch in practischen Fällen alle Lasten in gewissen Puncten concentrirt zu denken pflegt, so lag keine Veranlassung vor, solche Specialisirungen wirklich vorzunehmen.

LIBRARY OF THE UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA LIBRARY
BERKELEY

Return to desk from which borrowed.
This book is DUE on the last date stamped below.

2Jun'52ED
19May52LU

LD 21-95m-11,'50(2877s16)476

YC 13008